Dual topologique d'un espace ℓ^p. Exemples de parties compactes de ℓ^2

Dans tout le problème le corps de base des espaces vectoriels considérés est $\mathbb{C}$. Lorsque $(E\,,\,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, E' désigne l'espace des formes linéaires continues sur $(E\,,\,\|\cdot\|)$.

Partie I

[I] [S] **1)** On désigne par $\mathcal{B}$ la boule fermée unité de E, c'est à dire l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| \leqslant 1$. Montrer que l'on définit une norme $|||\cdot|||$ sur E' par la formule : $\forall\, x^* \in E'\ ,\ |||x^*||| = \underset{x\in\mathcal{B}}{\text{Sup}}\,|x^*(x)|$.

[I] [S] **2)** Dans toute la suite on considérera l'espace normé $(E'\,,\,|||\cdot|||)$ qui sera simplement noté E' et appelé dual topologique de E.

a) Soit $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E'. Montrer que pour chaque x fixé dans E, la suite $\big(x_n^*(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{C}$. On associe ainsi, à chaque $x \in E$, un unique complexe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^*(x)$ que l'on note $x^*(x)$.

b) Montrer que l'application $x^* : E \longmapsto \mathbb{C}$ définie en a) est élément de E'.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||x_n^* - x^*||| = 0$.

[I] [S] **3)** Énoncer le résultat de portée générale démontré dans cette partie.

Partie II

Soit ℓ^1 l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ soit absolument convergente. On munit ℓ^1 de la norme définie par $\forall\, x^* \in \ell^1\ ,\ \|x\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme définie par $\forall\, x^* \in \ell^\infty\ ,\ \|x\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Sup}}\,|x_n|$. On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de ℓ^∞ constitué des suites convergentes vers 0 et $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites complexes nulles au delà d'un certain rang. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note δ_n l'élément de $\mathcal{P}$ défini par $\delta_n = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\delta_{nk} = 1$ si $n = k$ et 0 si $n \neq k$.

[I] [S] **1)** **a)** Vérifier les inclusions $\mathcal{P} \subset \ell^1 \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$.

b) Comparer sur ℓ^1 la norme $\|\cdot\|_1$ avec la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à ℓ^1.

c) Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

d) Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie dense de $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$.

e) $\mathcal{P}$ est-elle une partie dense de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?

[I] [S] **2)** Soit $\Phi : (\ell^1)' \longmapsto \ell^\infty$ l'application définie par $\forall\, x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) = \big(x^*(\delta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que l'application Φ est bien définie, c'est à dire que, pour tout $x^* \in (\ell^1)'$, $\Phi(x^*) \in \ell^\infty$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

b) Montrer que Φ est une application linéaire continue. Quelle est sa norme ?

c) Montrer que Φ est une isométrie, c'est à dire une bijection telle que $\forall\, x^* \in (\ell^1)'$, $\|\Phi(x^*)\|_\infty = |||x^*|||$.

d) Que déduisez vous de I.3 et II.2.c en ce qui concerne l'espace normé ℓ^∞ ?

e) Construire une isométrie $\Psi : \mathcal{C}_0' \longmapsto \ell^1$. Qu'en déduisez vous pour l'espace normé ℓ^1 ?

Partie III

p et q sont des réels de $]1\,,\,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Pour tout réel t positif on pose $t^p = \exp(p\ln t)$ si $t>0$ et $t^0=1$. On note ℓ^p l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |x_n|^p$ soit convergente. On pose alors $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

[I] [S] **1) a)** Déduire de la convexité de l'exponentielle réelle que pour tout $(u\,,\,v)\in\mathbb{R}_+^2$, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}\cdot$

b) En déduire que si $(x\,,\,y)\in \ell^p\times\ell^q$ vérifie $\|x\|_p=\|y\|_q=1$, alors $z=(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$ et $\|z\|_1\leqslant 1$. En conclure que

$$\forall\,(x\,,\,y)\in\ell^p\times\ell^q\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}|x_n||y_n| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q\,.$$

Cette inégalité est dite inégalité de Hölder. Préciser le cas d'égalité.

c) Vérifier que $|x_n+y_n|^p \leqslant |x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}|x_n| + |x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}|y_n|$ et déduire de l'inégalité de Hölder que si $(x\,,\,y)\in(\ell^p)^2$, alors $x+y\in\ell^p$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n+y_n|^p\right) \leqslant \left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

d) En conclure que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞, et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p.

[I] [S] **2)** On donne ici deux réels tels que $1<p<r$.

a) Montrer que $\ell^p\subset\ell^r$. Comparer sur ℓ^p la norme $\|\cdot\|_p$ avec la restriction de $\|\cdot\|_r$ à ℓ_p.

b) Montrer que ℓ^p et son complémentaire dans ℓ^r sont des parties denses de $(\ell^r,\|\cdot\|_r)$.

[I] [S] **3) a)** Soit $x^*\in(\ell^p)'$. On pose $\Phi_p(x^*)=\big(x^*(\delta_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On note θ_n un argument de $x^*(\delta_n)$ et on considère les éléments de $\mathcal{P}$ définis par $X_n=\sum_{k=0}^{n}|x^*(\delta_k)|^{\frac{q}{p}}\,\mathrm{e}^{-i\theta_k}\,\delta_k$ pour chaque $n\in\mathbb{N}$.

En calculant $|x^*(X_n)|$ et en le majorant à l'aide de $|||x^*|||$, montrer que $\Phi_p(x^*)\in\ell^q$ et que $\|\Phi_p(x^*)\|_q\leqslant|||x^*|||$.

b) Montrer que Φ_p est une isométrie de $(\ell^p)'$ sur l^q.

c) Qu'en déduit-on pour le bidual topologique $(l^p)''$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

d) Quelle conclusion apporte I.3 pour tout espace ℓ^p quand $p \in [1, +\infty]$?

Partie IV

[I] [S] **1)** Montrer que la boule fermée unité $\mathcal{B}$ de ℓ^∞ n'est pas compacte.

[I] [S] **2)** Soit Q le sous-ensemble de ℓ^2 défini par $Q = \{x \in l^2 \mid |x_n| \leqslant \frac{1}{n}\}$. Montrer que Q n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension finie de ℓ^2 et que Q est compact.

[I] [S] **3)** Soit $u \in \ell^\infty$ et $Q(u) = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leqslant |u_n|\}$. Montrer que $Q(u)$ est compact si et seulement si $u \in \ell^2$.

♦ ♦ ♦

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Indications ou résultats

Partie I

[Q] **1)** Toute application linéaire continue est bornée sur la boule unité.

[Q] **2) a)** Vérifier que la suite $\left(x_n^*(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

b) Il suffit de prouver que x^* est linéaire et bornée sur la boule unité.

c) Montrer que la suite $\left(x_n^*(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport à $x \in \mathcal{B}$ vers $x^*(x)$.

[Q] **3)** Complétude du dual topologique d'un espace normé.

Partie II

[Q] **1) a)** Appliquer les définitions.

b) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1$ et utiliser les suites canoniques δ_k pour montrer que $\|\cdot\|_1$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $\|\cdot\|_\infty$.

c) Montrer que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, la suite de terme général $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\delta_k \in \mathcal{P}$ converge vers x dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

d) Procéder comme en c) avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0$ et la suite de terme général $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k\delta_k$.

e) Une limite uniforme d'une suite à valeurs dans $\mathcal{P}$ devrait converger vers 0. On justifiera donc une réponse négative.

[Q] **2) a)** $x^* \in (\ell^1)'$ est bornée sur $\mathcal{B}$, et $\delta_n \in \mathcal{B}$.

b) Montrer que l'application linéaire Φ est 1-Lipschitzienne puis, considérer l'élément remarquable x^* de $(\ell^1)'$ défini par $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, $x^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

c) Pour montrer que Φ conserve la norme utiliser II.1.c et II.2.b. Pour montrer que Φ est surjective, considérer pour chaque $u \in \ell^\infty$ la forme linéaire x^* sur ℓ^1 définie par $\forall\, x \in \ell^1$, $x^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x_n$.

d) Tout espace isométrique à un espace complet est complet.

e) Considérer l'application $\Psi : \mathcal{C}'_0 \longmapsto \ell^1$ qui à $x^* \in \mathcal{C}'_0$ associe $\Psi(x^*) = \left(x^*(\delta_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et procéder comme ci dessus pour montrer que c'est une isométrie.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.