

## Droites de meilleure approximation

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les trois points  $M_1, M_2, M_3$  de coordonnées respectives  $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ ,  $(x_2 = 1, y_2 = 1)$ ,  $(x_3 = -2, y_3 = 0)$ .

On va étudier par différentes méthodes l'ajustement du "nuage"  $(M_1, M_2, M_3)$  par une droite.

On désigne par :

- $\delta$  une direction donnée du plan.
- $D$  une droite non parallèle à  $\delta$ , d'équation  $y = ax + b$ .

On projette les points  $M_1, M_2, M_3$  sur  $D$  dans la direction  $\delta$ .

On note respectivement  $m_1, m_2, m_3$  les points obtenus.

1. Dans cette question, la direction  $\delta$  est celle de l'axe des ordonnées  $Oy$ .

On cherche la droite  $D$  rendant minimale l'expression  $f(a, b) = M_1m_1 + M_2m_2 + M_3m_3$ .

(a) Calculer les distances  $M_1m_1$ ,  $M_2m_2$ , et  $M_3m_3$ . [S]

(b) Dans cette question, le nombre réel  $b$  est fixé.

En discutant suivant  $b$ , étudier la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = |2x - b| + |x + b - 1|$ .

Montrer que l'application  $\varphi$  passe par un minimum pour  $x = \frac{b}{2}$ . [S]

(c) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_1, b_1)$  minimisant  $f(a, b)$ .

Identifier la droite  $D$  d'équation  $y_1 = a_1x + b_1$ . [S]

2. Dans cette question, la direction  $\delta$  est encore celle de l'axe des ordonnées.

On cherche la droite  $D$  minimisant l'expression  $g(a, b) = \max(M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3)$ .

(a) On définit les trois ensembles suivants :

- l'ensemble  $E_1$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|y| \leq \frac{1}{3}$ .
- l'ensemble  $E_2$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|y - 2x| \leq \frac{1}{3}$ .
- l'ensemble  $E_3$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|x + y - 1| \leq \frac{1}{3}$ .

Montrer que leur intersection  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$  se réduit au seul couple  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . [S]

(b) Prouver l'existence et l'unicité d'une droite  $D$  minimisant  $g(a, b)$ . [S]

3. Dans cette question, la direction  $\delta$  est toujours celle de l'axe des ordonnées.

On cherche la droite  $D$  rendant minimale  $h(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$ .

Le nombre réel  $a$  étant fixé, montrer que la fonction  $b \mapsto h(a, b)$  admet un minimum en un point unique que l'on précisera.

En déduire l'existence et l'unicité d'une droite  $D$  minimisant  $h(a, b)$ . [S]

4. Dans cette question,  $\lambda$  est un nombre réel donné, distinct de  $a$ .

La direction  $\delta$  est celle de la droite d'équation  $y = \lambda x$ .

On cherche la droite  $D$  minimisant l'expression  $h_\lambda(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$ .

- (a) Exprimer  $h_\lambda(a, b)$  en fonction de  $a, b, \lambda$ . [S]
- (b) Dans cette question, le nombre  $\lambda$  est fixé et différent de  $\frac{2}{7}$ .  
 $a$  étant donné, pour quelle valeur de  $b$  la fonction  $b \mapsto h_\lambda(a, b)$  est-elle minimale ?  
 En déduire que  $h_\lambda(a, b)$  est minimal lorsque  $\theta(a) = \frac{7a^2 - 4a + 1}{(a - \lambda)^2}$  est minimal. [S]
- (c) Étudier les variations de la fonction  $\theta$ . [S]
- (d) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_4, b_4)$  conduisant à la plus petite valeur possible pour  $h_\lambda(a, b)$ . On explicitera  $a_4$  et  $b_4$  en fonction de  $\lambda$ . [S]
- (e) Montrer qu'une telle droite  $D$  (d'équation  $y = ax + b$ ) n'existe pas si  $\lambda = \frac{2}{7}$ . [S]
- (f) Toujours si  $\lambda = \frac{2}{7}$ , vérifier l'existence d'une droite  $D$  solution mais d'équation  $x = \alpha$  (autrement dit, la quantité  $h_\lambda(a, b)$  est minimum si on projette parallèlement à la direction  $y = \lambda x$  et sur une droite  $D$  "verticale".) [S]
5. Dans cette question,  $n$  est un entier strictement positif.  
 On se donne un "nuage" de  $n$  points  $M_k(x_k, y_k)$ , avec  $1 \leq k \leq n$ .  
 On suppose que les points  $M_k$  ne sont pas alignés sur une même droite. On pose  

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2, \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$
 On définit également  $v(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ ,  $v(y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2$ , et  $\text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$ .  
 Soit  $m_k$  la projection de  $M_k$  sur la droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  parallèlement à  $Oy$ .  
 On se propose de trouver le couple  $(a, b)$  minimisant l'expression  $H(a, b) = \sum_{k=1}^n (M_k m_k)^2$ .
- (a) En considérant  $\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ , montrer que  $v(x) > 0$ . [S]
- (b) Quand on fixe  $a$ , montrer que  $H(a, b)$  est minimum quand  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ .  
 Comment peut-on interpréter ce résultat ? [S]
- (c) Montrez que le calcul précédent permet d'établir que  $|\text{cov}(x, y)| < v(x) v(y)$ . [S]
- (d) En déduire l'unique couple  $(a, b)$  minimisant la fonction  $H$ .  
 Quelle est la valeur de ce minimum ? [S]
6. Dans cette question, on projette les  $n$  points  $M_k$  sur la droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$ , parallèlement à la direction  $y = \lambda x$  (où  $\lambda$  est un réel fixé distinct de  $a$ ).  
 Pour chaque  $\lambda$ , on cherche s'il existe un couple  $(a, b)$  minimisant  $H_\lambda(a, b) = \sum_{k=1}^n (M_k m_k)^2$ .  
 En s'inspirant de ce qui précède, étudier l'existence d'un tel couple  $(a, b)$  et le cas échéant donner la valeur obtenue pour le minimum de  $H_\lambda(a, b)$ .  
 Pour simplifier les notations, on pourra poser :  $v = v(x)$ ,  $w = v(y)$ ,  $c = \text{cov}(x, y)$ . [S]

## Corrigé du problème

1. (a) Soit  $M(x, y)$  un point quelconque du plan.

Le point correspondant  $m$  sur  $D$  est  $m(x, ax + b)$  et la distance  $Mm$  est  $|ax + b - y|$ .

Ainsi  $M_1m_1 = |b|$ ,  $M_2m_2 = |a + b - 1|$ , et  $M_3m_3 = |2a - b|$ . [Q]

- (b)  $x \mapsto 2x - b$  s'annule pour  $x = \frac{b}{2}$  et  $x \mapsto x + b - 1$  s'annule pour  $x = 1 - b$ .

D'autre part,  $\frac{b}{2} < 1 - b \Leftrightarrow b < \frac{2}{3}$ . On en déduit :

$$- \text{ Si } b < \frac{2}{3}, \varphi(x) = \begin{cases} (-2x + b) + (-x - b + 1) = -3x + 1 & \text{sur } ] - \infty, \frac{b}{2} ] \\ (2x - b) + (-x - b + 1) = x - 2b + 1 & \text{sur } [\frac{b}{2}, 1 - b] \\ (2x - b) + (x + b - 1) = 3x - 1 & \text{sur } [1 - b, \infty[ \end{cases}$$

$\varphi$  est strictement décroissante sur  $] - \infty, \frac{b}{2}]$  puis strictement croissante sur  $[\frac{b}{2}, +\infty[$ .

Elle présente donc un minimum absolu en  $x = \frac{b}{2}$ , qui vaut  $\varphi(\frac{b}{2}) = 1 - \frac{3b}{2}$ .

$$- \text{ Si } b = \frac{2}{3}, \text{ alors } \varphi(x) = |2x - \frac{2}{3}| + |x - \frac{1}{3}| = 3|x - \frac{2}{3}| = |3x - 1|.$$

Dans ces conditions,  $\varphi(x) = -3x + 1$  sur  $] - \infty, \frac{1}{3}]$  et  $\varphi(x) = 3x - 1$  sur  $[\frac{1}{3}, +\infty[$ .

Bien sûr,  $\varphi$  est minimum en  $x = \frac{1}{3} = \frac{b}{2}$ , et ce minimum est nul.

$$- \text{ Si } b > \frac{2}{3}, \varphi(x) = \begin{cases} (-2x + b) + (-x - b + 1) = -3x + 1 & \text{sur } ] - \infty, 1 - b] \\ (-2x + b) + (x + b - 1) = -x + 2b - 1 & \text{sur } [1 - b, \frac{b}{2}] \\ (2x - b) + (x + b - 1) = 3x - 1 & \text{sur } [\frac{b}{2}, \infty[ \end{cases}$$

$\varphi$  est strictement décroissante sur  $] - \infty, \frac{b}{2}]$  puis strictement croissante sur  $[\frac{b}{2}, +\infty[$ .

Elle présente donc un minimum absolu en  $x = \frac{b}{2}$ , qui vaut  $\varphi(\frac{b}{2}) = \frac{3b}{2} - 1$ .

Dans tous les cas, le minimum  $\varphi$  est atteint en  $x = \frac{b}{2}$  et vaut  $\varphi(\frac{b}{2}) = \left| \frac{3b}{2} - 1 \right|$ . [Q]

- (c) D'après ce qui précède,  $f(a, b) = |b| + |a + b - 1| + |2a - b| = |b| + \varphi(a)$ .

À  $b$  fixé, le minimum de  $f(a, b)$  est obtenu pour  $a = \frac{b}{2}$  et vaut  $|b| + \left| \frac{3b}{2} - 1 \right|$ .

On doit donc chercher pour quel  $b$  la quantité  $h(b) = |b| + \left| \frac{3b}{2} - 1 \right|$  est minimum.

$$- \text{ Si } b \leq 0, h(b) = -b - \frac{3b}{2} + 1 = -\frac{5b}{2} + 1.$$

$$- \text{ Si } b \in [0, \frac{2}{3}], h(b) = b - \frac{3b}{2} + 1 = -\frac{b}{2} + 1.$$

$$- \text{ Si } b \in [\frac{2}{3}, +\infty[, h(b) = b + \frac{3b}{2} - 1 = \frac{5b}{2} - 1.$$

Ainsi  $h$  est strictement décroissante sur  $] - \infty, \frac{2}{3}]$  et strictement croissante sur  $[0, \frac{2}{3}]$ .

Cette application possède donc un minimum absolu en  $b = \frac{2}{3}$ ; qui vaut  $\frac{2}{3}$ .

La quantité  $f(a, b)$  est donc minimum pour l'unique couple  $(a_1, b_1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

La droite  $D$  a pour équation  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . C'est la droite joignant  $M_2$  et  $M_3$ .

On a donc ici  $m_2 = M_2$  et  $m_3 = M_3$ . [Q]