Crochet de Lie et projecteurs en dimension finie

Dans tout le problème :

- n est un entier naturel non nul.
- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n.
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
  Pour tous éléments f, g de $\mathcal{L}(E)$, on note $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.
- $\mathcal{P}_E$ désigne l'ensemble des projecteurs (projections vectorielles) de E.

Première partie

1. Rappeler pourquoi il est possible de définir la trace d'un endomorphisme de E. [S]
2. Rappeler pourquoi la trace d'un projecteur est égale à son rang. [S]
3. Soient p dans $\mathcal{P}_E$, et f dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
   Montrer que p est l'application nulle. [S]
4. Sur l'ensemble $\mathcal{P}_E$, on pose $p \mathcal{R} q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$.
   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$. [S]
5. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^4$. On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Soit p dans $\mathcal{L}(E)$, de matrice A dans la base canonique.
   (a) Montrer que p est un projecteur de E.
   Préciser une base (ε') de l'image de p, et une base (ε'') du noyau de p.
   On note alors (ε) la base de E obtenue par juxtaposition de (ε') et de (ε''). [S]
   (b) Caractériser par leur matrice dans (ε) les f de $\mathcal{L}(E)$ tels que $[p, f] = 0$.
   Interpréter le résultat obtenu en termes de stabilité. [S]
   (c) Caractériser par leur matrice dans (ε) les projecteurs q de E tels que $p \mathcal{R} q$. [S]
6. Soit p un élément quelconque de $\mathcal{P}_E$, et soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.
   Montrer que $[p, f] = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f. [S]
7. Soient p, q deux projecteurs de E tels que $[p, q] = 0$.
   (a) Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont dans $\mathcal{P}_E$. [S]
   (b) Montrer que, pour la relation $\mathcal{R}$:
   – Le projecteur $p \circ q$ est le plus grand des minorants de p et q.
   – Le projecteur $p + q - p \circ q$ est le plus petit des majorants de p et q. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne f, g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[f, g] = \alpha f + \beta g$, avec α, β dans $\mathbb{K}$.

1. Dans cette question, on suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$. Ainsi $[f, g] = \alpha f$, avec $\alpha \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $[f^k, g] = \alpha k f^k$. [S]
   (b) On suppose que $f^m \neq 0$, avec $m \geq 0$.
   Montrer alors que les applications $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^m$ sont libres dans $\mathcal{L}(E)$. [S]
   (c) Déduire de ce qui précède que l'endomorphisme f est nilpotent. [S]
2. Dans cette question, on suppose que f, g sont deux éléments distincts de $\mathcal{P}_E$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à 1.
   (a) Montrer que $2\alpha\, g \circ f + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$. [S]
   (b) En déduire $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g$, puis $g \circ f = f$. [S]
   (c) On suppose $f \neq 0$. Montrer que $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$. [S]
   (d) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p \\ q \circ p = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[p, q] = q - p$. [S]
   (e) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = q - p$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que f, g sont distincts de $\mathcal{P}_E$, avec $f \neq 0$.
   On suppose également que α n'est ni égal à 0, ni égal à -1.
   (a) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$, $f \circ g = f$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$. [S]
   (b) Réciproquement, montrer que si p, q sont deux projecteurs tels que $\begin{cases} \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q \\ p \circ q = p \end{cases}$, alors on a l'égalité $[p, q] = p - q$. [S]
   (c) On reprend les notations de la question I.4
   Caractériser par leur matrice dans (ε) les q de $\mathcal{P}_E$ tels que $[p, q] = p - q$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrigé du problème

Première partie

1. Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, et soit A la matrice de f dans une base (e) de E.
On pose $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A)$. Cette définition ne dépend pas de la base (e) utilisée.
En effet soit (ε) une autre base de E, et P la matrice de passage de (e) à (ε).
La matrice B de f dans la base (ε) s'écrit $B = P^{-1}AP$.
On sait d'autre part que pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$.
On en déduit $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$. [Q]

2. Soit p un projecteur de E, de rang r. Par définition $r = \dim \operatorname{Im}(p)$.
Si $r = 0$, alors $p = 0$ donc $\operatorname{tr}(p) = 0 = \operatorname{rg}(p)$.
Si $r = n$, alors $p = \mathrm{Id}$ (car $E = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Inv}(p)$) donc $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = n = \operatorname{rg}(p)$.
Dans le cas général, on a $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et $\dim \operatorname{Im}(p) = r \in \{1, \dots, n-1\}$.
On se donne une base (e') de $\operatorname{Im}(p)$ et une base (e'') de $\operatorname{Ker}(p)$.
On forme une base (e) de E en juxtaposant (e') et (e'').
Dans la base (e), la matrice de la projection p est $A = J_r(n) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
On en déduit ici $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(A) = r = \operatorname{rg}(p)$. [Q]

3. On suppose donc $p \circ f - f \circ p = \alpha p$, avec $\alpha \neq 0$.
Les propriétés de la "trace" donnent $\operatorname{tr}(p \circ f - f \circ p) = \operatorname{tr}(p \circ f) - \operatorname{tr}(f \circ p) = 0$.
Ainsi $0 = \operatorname{tr}(\alpha p) = \alpha \operatorname{tr}(p)$, ce qui implique $\operatorname{tr}(p) = 0$.
Or $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$. Il en découle $\operatorname{rg}(p) = 0$ c'est-à-dire $p = 0$. [Q]

4. Réflexivité : pour tout projecteur p, on a $p \circ p = p$ donc $p \mathcal{R} p$.
Antisymétrie : si p, q dans $\mathcal{P}_E$ vérifient $p \mathcal{R} q = q \mathcal{R} p$, il est évident que $p = q$.
Transitivité : soient p, q, r trois projecteurs tels que $p \mathcal{R} q$ et $q \mathcal{R} r$.
Alors $\begin{cases} p \circ q = q \circ p = p \\ q \circ r = r \circ q = q \end{cases}$ donc $\begin{cases} p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p \\ r \circ p = r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p = q \circ p = p \end{cases}$
On a donc montré que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$. [Q]

5. (a) On a immédiatement $A^2 = A$, donc $p^2 = p$: l'application p est un projecteur.
A est visiblement de rang 2 (colonnes C_1 et C_2 libres, $\mathrm{C}_3 = -\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{C}_4 = \overrightarrow{0}$.)
Ainsi $\dim \operatorname{Im}(p) = 2$ puis $\dim \operatorname{Ker}(p) = 2$ (théorème de la dimension.)
Une base (ε') de $\operatorname{Im}(p)$ est formée par $\begin{cases} \varepsilon_1 = 3p(e_1) = (2, 0, -1, 0) \\ \varepsilon_1 = 3p(e_2) = (1, 3, 1, 0) \end{cases}$
On a $p(e_1) = -p(e_3)$ et $p(e_4) = \overrightarrow{0}$.
Une base (ε'') de $\operatorname{Ker}(p)$ est donc formée de $\begin{cases} \varepsilon_3 = e_1 + e_3 = (1, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_4 = e_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.