Polynômes de Legendre sur [0,1], quadratures de Gauss

On définit les suites de polynômes (U_n) et (P_n) de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \qquad \forall\, n \geq 1,\ U_n = \frac{X^n(X-1)^n}{n!} \qquad \forall\, n \geq 0,\ P_n = U_n^{(n)}$$

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*
   (a) Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3. [S]
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   Qu'en déduit-on concernant la courbe représentative de P_n ? [S]
   (c) Montrer que P_n est un polynôme de degré n, à coefficients entiers relatifs.
   Préciser les coefficients dominant et constant de P_n, ainsi que $P_n(1)$. [S]

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*
   (a) Vérifier la relation $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)U_n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(X^2-X)P_n''+(2X-1)P_n'-n(n+1)P_n = 0$. [S]
   (b) Vérifier les relations $U_{n+1}' = (2X-1)U_n$ et $U_{n+1}'' = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.
   En dérivant n fois la première et $n-1$ fois la seconde, prouver que :
   [S] $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$

3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*
   (a) Soit n un entier naturel, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$.
   En intégrant par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$. [S]
   (b) Par des intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}$ [S]
   (c) Prouver que pour tous entiers m et n :
   [S] $\qquad \displaystyle\int_0^1 P_n(t)P_m(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si } m \neq n, \quad \text{et} \quad \int_0^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}.$

4. *Propriété génératrice des polynômes P_n.*
   (a) Pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.
   Indication : raisonner par récurrence sur n [S].

(b) Avec ces notations, montrer que $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\},\ \lambda_k = (2k+1)\displaystyle\int_0^1 P(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t$ [S]

5. *Racines des polynômes P_n.*

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cette question, on montre par deux méthodes différentes que le polynôme P_n possède n racines distinctes, et que ces racines appartiennent à l'intervalle $]0,1[$.

(a) *Première méthode :* Soit $\mathcal{S} = \{x_1,\ldots,x_p\}$ l'ensemble éventuellement vide des racines de P_n dans $]0,1[$ et qui ont une multiplicité impaire, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
Supposer $p < n$ et utiliser (3a) avec $Q = \prod\limits_{k=1}^{p}(X - x_k)$ (et $Q = 1$ si $\mathcal{S} = \emptyset$.) [S]

(b) *Seconde méthode :* Revenir à la définition de P_n utiliser le théorème de Rolle. [S]

6. *Minoration de P_n pour $x \notin [0,1]$*

Dans la suite de ce problème, n est fixé et strictement positif.

On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de P_n, rangées dans l'ordre croissant.

(a) Montrer que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $x_{n+1-k} = 1 - x_k$.
En déduire que $P_n^2 = (\mathrm{C}_{2n}^{n})^2 \prod\limits_{k=1}^{n}(x(x-1) + x_k(1-x_k))$. [S]

(b) Prouver l'inégalité $\mathrm{C}_{2n}^{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}$.
En déduire que si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ alors $|P_n(x)| \geq \frac{1}{2n+1}\Big(4\sqrt{x(x-1)}\Big)^n$. [S]

7. *Interpolation polynomiale*

(a) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme L_k tel que :

$$\deg(L_k) \leq n-1 \qquad L_k(x_k) = 1 \qquad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\},\ L_k(x_j) = 0$$

On donnera l'expression factorisée du polynôme L_k. [S]

(b) Montrer que pour tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x_k)L_k$. [S]

(c) Pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$, on pose $\ell_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k)$.
Indication : utiliser la division de P par P_n, ainsi que les questions (3b) et (7b). [S]

(d) Pour tout j de $\{1,\ldots,n\}$, prouver que $\ell_j > 0$.
Indication : utiliser la question précédente avec le polynôme $P = L_j^2$. [S]

8. *Quadratures de Gauss*

   On reprend les notations de la question précédente.

   On considère l'approximation $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)$, où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

   On sait que cette approximation est en fait une égalité si f est un polynôme de degré $\leq 2n-1$.

   On se propose d'étudier la qualité de cette approximation quand f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$.

   (a) Montrer que : $\exists\,!P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$, $\begin{cases} P(x_k) = f(x_k) \\ P'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

   Indication : poser $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Utiliser (7b). [S]

   (b) Pour tout t de $[0,1]$, montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que $f(t)-P(t) = \dfrac{n!^4\, f^{(2n)}(c)}{(2n)!^3} P_n^2(t)$.

   Indication : si $t \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$ utiliser $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda P_n(x)^2$ avec $\varphi(t) = 0$. [S]

   (c) On note M_{2n} la borne supérieure de $\left|f^{(2n)}\right|$ sur $[0,1]$.

   Déduire de ce qui précède que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \ell_k f(x_k)\right| \leq \dfrac{M_{2n}\,(n!)^4}{(2n)!^3\,(2n+1)}$ [S]

   (d) Application numérique. Que devient le majorant précédent si $n = 5$? [S]

9. Illustrer librement les résultats précédents avec Maple, quand $n = 5$. [S]

Corrigé du problème

1. *Quelques propriétés immédiates des polynômes P_n*

   (a) On trouve sucessivement :

   ◇ $U_0 = 1$ donc $P_0 = U_0^{(0)} = U_0 = 1$.

   ◇ $U_1 = X^2 - X$ donc $P_1 = U_1' = 2X - 1$.

   ◇ $U_2 = \frac{1}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2)$ donc $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.

   ◇ $U_3 = \frac{1}{6}(X^6 - 3X^5 + 3X^4 - X^3)$ donc $P_3 = 20X^3 - 30X^2 + 12X - 1$. [Q]

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n(1-X) = \frac{1}{n!}(1-X)^n(-X)^n = \frac{1}{n!}(X-1)^n X^n = U_n(X)$.

   Si on dérive n fois, on trouve $(-1)^n U_n^{(n)}(1-X) = U_n^{(n)}(X)$.

   Autrement dit, pour tout entier n, on a $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.

   On en déduit que la courbe représentative de P_n est :

   ◇ symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$ si n est pair.

   ◇ symétrique par rapport au point $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$ si n est impair. [Q]

   (c) Par définition, U_n est un polynôme de degré $2n$.

   Le polynôme P_n, qui en est la dérivée n-ième, est donc de degré n.

   Pour tout entier n, on obtient en utilisant la formule du binôme :

   $$U_n = \frac{1}{n!}X^n(X-1)^n = \frac{1}{n!}X^n \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} X^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} X^{k+n}$$

   On dérive n fois et on obtient l'expression développée de P_n :

   $$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} \frac{(k+n)!}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_{n+k}^n X^k$$

   Cette expression montre que P_n s'écrit $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbb{Z}$.

   Le coefficient dominant est $a_n = (-1)^0 \mathrm{C}_n^n \mathrm{C}_{2n}^n = \mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

   Le coefficient constant de P_n est $P(0) = a_0 = (-1)^n \mathrm{C}_n^0 \mathrm{C}_n^n = (-1)^n$.

   Enfin, la question (1b) donne : $P_n(1) = (-1)^n P_n(0) = 1$. [Q]

2. *Deux relations vérifiées par les polynômes P_n.*

   (a) Pour tout $n \geq 1$, on a $U_n = \frac{(X^2-X)^n}{n!}$, donc $U_n' = (2X-1)\frac{(X^2-X)^{n-1}}{(n-1)!}$.

   On en déduit $(X^2 - X)U_n' = n(2X-1)\frac{(X^2-X)^n}{n!} = n(2X-1)U_n$.

   Enfin, cette égalité est vérifiée de façon évidente si $n = 0$.

   On dérive $n+1$ fois avec la formule de Leibniz. On trouve :

$(X^2-X)U_n^{(n+2)}+\mathrm{C}_{n+1}^{1}\,(2X-1)U_n^{(n+1)}+2\mathrm{C}_{n+1}^{2}\,U_n^{(n)} = n(2X-1)U_n^{(n+1)}+2n\mathrm{C}_{n+1}^{1}\,U_n^{(n)}$

Autrement dit

$$(X^2-X)P_n''+(n+1)(2X-1)P_n'+n(n+1)P_n = n(2X-1)P_n'+2n(n+1)P_n$$

Finalement, on a obtenu : $(X^2-X)P_n''+(2X-1)P_n'-n(n+1)P_n=0$ [Q]

(b) On a $U_{n+1}=\frac{(X^2-X)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $U_{n+1}'=(2X-1)\frac{(X^2-X)^n}{n!}=(2X-1)U_n$.

Si on dérive cette égalité, on trouve : $U_{n+1}''=2U_n+(2X-1)U_n'$.

Si $n\geq 1$, on a $U_n'=(2X-1)U_{n-1}$ donc $U_{n+1}''=2U_n+(2X-1)^2U_{n-1}$.

Par ailleurs $(2X-1)^2U_{n-1}=4(X^2-X)U_{n-1}+U_{n-1}=4nU_n+U_{n-1}$.

On a donc obtenu l'égalité $U_{n+1}''=2(2n+1)U_n+U_{n-1}$, pour tout $n\geq 1$.

– Si on dérive n fois $U_{n+1}'=(2X-1)U_n$ on trouve $U_{n+1}^{(n+1)}=(2X-1)U_n^{(n)}+2nU_n^{(n-1)}$.

  Autrement dit : $P_{n+1}=(2X-1)P_n+2nU_n^{(n-1)}$.

– On dérive maintenant $n-1$ fois la relation $U_{n+1}''=2(2n+1)U_n+U_{n-1}$.

  On trouve $U_{n+1}^{(n+1)}=2(2n+1)U_n^{(n-1)}+U_{n-1}^{(n-1)}$.

  Autrement dit $P_{n+1}=P_{n-1}+2(2n+1)U_n^{(n-1)}$.

– Il suffit d'éliminer $U_n^{(n-1)}$ entre les deux égalités obtenues.

  On trouve : $((2n+1)-n)P_{n+1}=(2n+1)(2X-1)P_n-nP_{n-1}$.

On a donc obtenu : $\forall\, n\geq 1,\ (n+1)P_{n+1}-(2n+1)(2X-1)P_n+nP_{n-1}=0$. [Q]

3. *Propriété intégrale des polynômes P_n.*

(a) On utilise la formule d'intégration par parties répétées :

$$\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kU_n^{(k)}(t)f^{(n-k-1)}(t)\Big]_0^1+(-1)^n\int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par définition, les réels 0 et 1 sont des racines de multiplicité n de U_n.

On en déduit que $U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(1)=0$ pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$.

Il en découle l'égalité $\displaystyle\int_0^1 U_n(t)f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 U_n^{(n)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si Q appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on applique ce qui précède à $f=Q$.

Puisque $Q^{(n)}=0$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=0$. [Q]

(b) Posons $I_{n,m}=\displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)^m\,\mathrm{d}t$, avec $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$.

En intégrant par parties, on trouve, si $m\geq 1$:

$$I_{n,m}=\frac{1}{n+1}\Big[t^{n+1}(t-1)^m\Big]_0^1-\frac{m}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(t-1)^{m-1}\,\mathrm{d}t=-\frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$$