

## Transformation de Laplace.

### Partie I. Notations et définitions

Soit  $f$  une application définie sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et continue.

Pour tout réel  $p$ , on note  $f_p$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f_p(t) = e^{-pt}f(t)$ .

On note  $I(f)$  l'ensemble des réels  $p$  tels que l'application  $f_p$  soit bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

1. (a) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir  $I(f) = \emptyset$ , ou au contraire  $I(f) = \mathbb{R}$ . [S]

(b) Dans cette question, on suppose que  $f$  est une application polynomiale non nulle.

Montrer que  $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$  si  $f$  est non constante, et que  $I(f) = \mathbb{R}^+$  sinon. [S]

2. Dans cette question, on suppose que  $I(f)$  est non vide.

(a) Soit  $p$  dans  $I(f)$ , et soit  $q > p$ . Montrer que  $\lim_{+\infty} f_q = 0$ .

En déduire que l'intervalle  $]p, +\infty[$  est inclus dans  $I(f)$ . [S]

(b) En déduire que  $I(f)$  est un intervalle de l'un des types suivants :

$I(f) = ]\alpha, +\infty[$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , ou  $I(f) = [\alpha, +\infty[$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On dira alors que  $\alpha$  est l'abscisse de  $f$ . On la notera  $\alpha_f$  ou  $\alpha(f)$ .

Remarque : d'après (1b), l'abscisse de toute fonction polynomiale est 0. [S]

(c) Soit  $A$  une fonction polynomiale non nulle sur  $\mathbb{R}^+$ .

Montrer que l'application  $g = Af$  a même abscisse que  $f$ . [S]

3. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ , continues et telles que  $I(f) \neq \emptyset$ .

Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$ . Montrer que si  $p > \alpha_f$  l'application  $f_p$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Pour tout réel  $p > \alpha_f$ , on pose alors  $\mathcal{L}(f)(p) = \int_{\mathbb{R}^+} f_p = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t) dt$ .

On définit ainsi une application  $\mathcal{L}(f)$  de  $] \alpha_f, +\infty[$  dans  $\mathbb{C}$ .

On dit que  $\mathcal{L}(f)$  est la *transformée de Laplace* de l'application  $f$ . [S]

### Partie II. Premiers exemples

1. Dans cette question, on voit un premier exemple important de transformée de Laplace.

Soit  $\omega$  un nombre complexe. Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(t) = e^{\omega t}$ .

(a) Montrer que  $f$  est un élément de  $\mathcal{E}$  et que son abscisse est  $\alpha_f = \operatorname{Re}(\omega)$ . [S]

(b) Montrer que  $\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p - \omega}$  pour tout  $p > \operatorname{Re}(\omega)$ .

Pour exprimer ce résultat, on notera simplement  $\mathcal{L}(e^{\omega t}) = \frac{1}{p - \omega}$ , pour  $p > \operatorname{Re}(\omega)$ .

Si  $\omega = 0$ , on constate donc que  $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$ , pour  $p > 0$ . [S]

2. (a) Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{E}$ . Soient  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{C}$ . On pose  $h = \lambda f + \mu g$ .

Montrer que  $h$  est dans  $\mathcal{E}$  et que  $\mathcal{L}(h) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$  sur  $] \max(\alpha_f, \alpha_g), +\infty[$ . [S]

(b) On considère les quatre applications  $\begin{cases} t \mapsto \sin t \\ t \mapsto \cos t \end{cases}, \begin{cases} t \mapsto \operatorname{sh} t \\ t \mapsto \operatorname{ch} t \end{cases}$ , définies sur  $\mathbb{R}^+$ .

Montrer que ces applications sont dans  $\mathcal{E}$ . Calculer leurs transformées de Laplace. [S]

### Partie III. Régularité de la transformée de Laplace d'une application

Dans cette question,  $f$  est un élément de  $\mathcal{E}$  d'abscisse  $\alpha_f$ .

On va vérifier certaines propriétés de l'application  $F = \mathcal{L}(f)$  sur  $I = ]\alpha_f, +\infty[$ .

1. Montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$ .

Indication : utiliser un réel fixé  $q > \alpha_f$ , et se limiter à  $p > q$ . [S]

2. (a) Pour tout réel  $x$ , montrer que  $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2 e^{|x|}}{2}$ . [S]

- (b) Justifier l'existence sur  $I$  de  $G_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} f(t) dt$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ . [S]

- (c) On se donne les réels  $p_0, p, h$  tels que  $\alpha_f < p_0 < p$  et  $|h| \leq p - p_0$ .

Montrer que  $|F(p+h) - F(p) + hG_1(p)| \leq \frac{h^2}{2} K$ , avec  $K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-p_0 t} |f(t)| dt$ . [S]

- (d) En déduire que  $F$  est dérivable sur  $I$  et que  $\forall p \in I, F'(p) = -G_1(p)$ .

On notera que ce résultat peut s'écrire :  $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}(f(t))$ . [S]

3. (a) Montrer plus généralement que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et tout  $p$  de  $I$  :  $F^{(n)}(p) = (-1)^n G_n(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} f(t) dt$ .

On notera que ce résultat peut s'écrire :  $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \mathcal{L}(f(t))$ . [S]

- (b) En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la transformée de Laplace de  $t \mapsto t^n$  est  $p \mapsto \frac{n!}{p^{n+1}}$ .

On exprime ce résultat en notant  $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ , pour  $p > 0$ . [S]

4. On va améliorer le résultat de (III.1), en prouvant que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0)$ .

Il en découle (quand  $p \rightarrow +\infty$ )  $F(p) \sim \frac{f(0)}{p}$  si  $f(0) \neq 0$  et  $F(p) = o\left(\frac{1}{p}\right)$  si  $f(0) = 0$ .

On se donne un réel  $\varepsilon > 0$ , et un réel  $a > 0$  tel que  $0 \leq t \leq a \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ .

Enfin  $p$  désigne un réel quelconque strictement supérieur à 0 et à  $\alpha_f$ .

- (a) Montrer que  $|pF(p) - f(0)| \leq \varepsilon + pK_p$ , avec  $K_p = \int_a^{+\infty} e^{-pt} |f(t) - f(0)| dt$ . [S]

- (b) On fixe un réel  $q$  tel que  $q > \max(0, \alpha_f)$ .

Justifier l'existence d'un réel  $M$  majorant  $t \mapsto e^{-qt} |f(t) - f(0)|$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

En déduire l'inégalité  $K_p \leq \frac{M}{p-q} e^{(q-p)a}$ , valable pour tout  $p > q$ . [S]

- (c) Conclure. [S]

5. Dans cette question, on suppose que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{C}$ .

- (a) Prouver que l'abscisse de  $f$  est négative ou nulle. [S]

- (b) En s'inspirant de la méthode de la question (III.4), prouver que  $\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \ell$ . [S]

## Partie IV. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Dans cette partie,  $f$  désigne un élément de  $\mathcal{E}$ . On note  $F = \mathcal{L}(f)$ .

1. Dans cette question, on étudie les transformées de Laplace des dérivées de  $f$ .

(a) On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , et que  $f'$  est élément de  $\mathcal{E}$ .

Montrer que sur un certain intervalle  $]\alpha, +\infty[$ , on a :  $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$ .

Noter que cela redonne (avec des hypothèses plus fortes) le résultat de (III.4). [S]

(b) On suppose maintenant que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

On suppose également que les applications  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  sont éléments de  $\mathcal{E}$ .

On note  $\alpha$  le maximum des abscisses de  $f, f', \dots, f^{(n)}$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (\text{pour tout } p > \alpha) \end{aligned}$$

En déduire un développement limité de  $F(p)$  au voisinage de  $+\infty$ . [S]

2. On étudie ici la transformée de Laplace d'une primitive de  $f$ .

(a) On note  $g$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0 :  $\forall t \geq 0, g(t) = \int_0^t f(u) du$ .

Montrer que  $g$  est dans  $\mathcal{E}$  (utiliser  $p > \max(\alpha_f, 0)$ .)

Plus généralement, montrer que toute primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  est dans  $\mathcal{E}$ . [S]

(b) Soit  $G$  la transformée de Laplace de l'application  $g$ .

Montrer que sur un certain intervalle  $]\alpha, +\infty[$ , on a :  $G(p) = \frac{F(p)}{p}$ . [S]

3. Dans cette question, on suppose que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \ell \in \mathbb{C}$ .

On définit alors l'application  $h$  sur  $\mathbb{R}^+$  par  $h(0) = \ell$  et :  $\forall t > 0, h(t) = \frac{f(t)}{t}$ .

(a) Montrer que l'application  $h$  est élément de  $\mathcal{E}$ , ayant la même abscisse que  $f$ . [S]

(b) Soit  $H$  la transformée de Laplace de  $h$ .

Montrer que, pour tout  $p > \alpha$ , on a :  $H(p) = \int_p^{+\infty} F(q) dq$ . [S]

(c) En déduire que, pour tout  $p > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan p$ . [S]

4. Dans cette question,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

On note  $g$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $g(t) = f(\lambda t)$ .

(a) Montrer que  $g$  est dans  $\mathcal{E}$  et que son abscisse vérifie  $\alpha_g = \lambda \alpha_f$ . [S]

(b) Prouver que pour tout  $p > \alpha_g$ , on a  $\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$ . [S]

(c) Donner les transformées de Laplace de  $\begin{cases} t \mapsto \sin(\lambda t) \\ t \mapsto \cos(\lambda t) \end{cases}, \begin{cases} t \mapsto \text{sh}(\lambda t) \\ t \mapsto \text{ch}(\lambda t) \end{cases}$  [S]

## Partie V. Le produit de convolution

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{C}$ .

Pour tout réel positif ou nul  $t$ , on pose  $(f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du$ .

On dit que l'application  $f \star g$  est le *produit de convolution* de  $f$  et de  $g$ .

1. Montrer que  $f \star g = g \star f$ . [S]

2. On se propose de montrer que  $f \star g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

(a) Montrer que pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ , on peut écrire :  $(f \star g)(t) = t \int_0^1 f(vt)g(t-vt) dv$ .

On pose  $h(t) = \int_0^1 f(vt)g(t-vt) dv$ , pour  $t \geq 0$ . [S]

(b) On se donne un réel  $a > 0$ . Les applications  $f$  et  $g$  étant continues sur  $\mathbb{R}^+$ , elles sont bornées et uniformément continues sur  $[0, a]$ .

Montrer que l'application  $h$  est uniformément continue sur  $[0, a]$  et conclure. [S]

3. Dans cette question, on note  $G$  la primitive de  $g$  qui s'annule à l'origine.

Pour tout  $a \geq 0$ , montrer que  $\int_0^a (f \star g)(t) dt = (f \star G)(a)$ .

On admettra au besoin la possibilité d'invertir les deux intégrales. [S]

4. Dans cette question, on suppose que  $f$  et  $g$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

(a) Dédurre de la question précédente que pour tout  $a \geq 0$  on a l'encadrement :

$$\int_0^a (f \star g)(t) dt \leq \int_0^a f(t) dt \int_0^a g(t) dt \leq \int_0^{2a} (f \star g)(t) dt. \quad [S]$$

(b) On suppose que  $f, g$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}^+$ .

Montrer que  $f \star g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$ . [S]

5. Dans cette question, on suppose que  $f$  et  $g$  sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

(a) Pour tout réel  $a \geq 0$ , prouver la majoration suivante :

$$\left| \int_0^a f(t) dt \int_0^a g(t) dt - \int_0^a (f \star g)(t) dt \right| \leq \int_0^a |f(t)| dt \int_0^a |g(t)| dt - \int_0^a (|f| \star |g|)(t) dt \quad [S]$$

(b) On suppose que  $f, g$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}^+$ .

Montrer que  $f \star g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et que  $\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$ . [S]

6. Dans cette question, on suppose que  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$ .

(a) Pour toute application  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ , on rappelle la notation  $h_p : t \mapsto e^{-pt}h(t)$ .

Pour tout réel  $p$ , montrer l'égalité  $(f \star g)_p = f_p \star g_p$ . [S]

(b) En déduire que  $f \star g$  est un élément de  $\mathcal{E}$  et que  $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$ .

On vérifiera que l'abscisse de  $f \star g$  est inférieure ou égale à  $\max(\alpha_f, \alpha_g)$ . [S]

## Partie VI. Extension aux applications continues par morceaux.

Il est possible d'étendre ce qui vient d'être fait au cas des applications continues par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les résultats précédents se généralisent sans difficulté, à quelques modifications mineures près.

Dans ce qui suit, on modifie la définition de  $\mathcal{E}$  en l'étendant aux applications continues par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$ , et en précisant que l'abscisse d'une application  $f$  de  $\mathcal{E}$  est la borne inférieure des  $p$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $t \mapsto e^{-pt}f(t)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Il sera commode de considérer que les éléments  $f$  de  $\mathcal{E}$  sont en fait définis sur  $\mathbb{R}$  mais sont identiquement nuls sur  $\mathbb{R}^{-*}$ .

Ainsi quand on écrit  $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{p^2 + 1}$ , l'application  $f$  est définie par  $\begin{cases} f(t) = \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

Il est clair que si on modifie un élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  en des points isolés (c'est-à-dire en un nombre fini de points sur chaque segment), alors l'application  $g$  obtenue est encore élément de  $\mathcal{E}$ , possède la même abscisse que  $f$ , et les deux applications  $f$  et  $g$  ont la même transformée de Laplace.

Voici les deux principales modifications à apporter à ce qui a déjà été vu :

- Le résultat de (III.4) devient :  $\lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0+)$ .
- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$ , et si  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  sont dans  $\mathcal{E}$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \dots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad (\text{pour tout } p > \alpha) \end{aligned}$$

1. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  un élément de  $\mathcal{E}$ , et  $\lambda > 0$ . On note  $F$  la transformée de Laplace de  $f$ .

Soit  $g$  l'application définie par  $g(t) = f(t - \lambda)$ . En particulier  $g(t) = 0$  si  $t < \lambda$ .

- (a) Montrer que  $g$  est élément de  $\mathcal{E}$ , avec la même abscisse que  $f$ . [S]
- (b) Montrer que la transformée de Laplace de  $g$  est  $G : p \mapsto e^{-\lambda p}F(p)$ .  
On exprimera ce résultat en écrivant simplement :  $\mathcal{L}(f(t - \lambda)) = e^{-\lambda p}\mathcal{L}(f)$ . [S]
- (c) En déduire  $\mathcal{L}(f)$  si  $f$  est définie par :  $f(t) = 1$  sur  $[0, 1[$ , et  $f(t) = 0$  ailleurs. [S]

2. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On note  $F$  la transformée de Laplace de  $f$ .

Soit  $h$  l'application définie par  $h(t) = e^{-\lambda t}f(t)$ .

- (a) Montrer que  $h$  est dans  $\mathcal{E}$ . Déterminer son abscisse en fonction de celle de  $f$ . [S]
- (b) Montrer que la transformée de Laplace de  $h$  est  $H : p \mapsto F(p + \lambda)$ .  
On exprimera ce résultat en écrivant simplement :  $\mathcal{L}(e^{-\lambda t}f)(p) = \mathcal{L}(f)(p + \lambda)$ . [S]

3. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}$ . On suppose que  $f$  est  $T$ -périodique, avec  $T > 0$ .

Soit  $\hat{f}$  l'application définie par  $\hat{f}(t) = f(t)$  sur  $[0, T[$  et  $\hat{f}(t) = 0$  ailleurs.

Soit  $F$  la transformée de Laplace de  $f$ , et soit  $\hat{F}$  celle de  $\hat{f}$ .

- (a) Montrer qu'on a l'égalité  $F(p) = \frac{\hat{F}(p)}{1 - e^{-Tp}}$ , pour tout  $p > 0$ . [S]
- (b) En déduire  $\mathcal{L}(f)$ , si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(t) = |\sin t|$ . [S]

## Corrigé du problème

### Partie I. Notations et définitions

1. (a) – Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(t) = e^{t^2}$ .

Pour tout réel  $p$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2 - pt} = +\infty$ .

Ainsi l'application  $f_p$  n'est jamais bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc  $I(f) = \emptyset$ .

– Si on prend pour  $f$  l'application nulle, alors évidemment  $I(f) = \mathbb{R}$ .

– Un exemple moins trivial est fourni par l'application  $t \mapsto f(t) = e^{-t^2}$ .

En effet, pour tout réel  $p$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2 - pt} = 0$ .

L'application  $f_p$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et elle a une limite finie en  $+\infty$ .

On en déduit qu'elle est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , et ceci pour tout réel  $p$ . Ainsi  $I(f) = \mathbb{R}$ .

[Q]

- (b) L'application  $f$  est évidemment continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

– Supposons que  $f$  soit une application constante  $t \mapsto \lambda$ , avec  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

Si  $p \geq 0$ , alors  $|f_p(t)| = |\lambda| e^{-pt} \leq |\lambda|$  pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $p < 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| e^{-pt} = +\infty$ .

Ainsi  $f_p$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si  $p \geq 0$ . Donc  $I(f) = \mathbb{R}^+$ .

– Supposons que  $f$  soit de degré  $n \geq 1$ , de terme dominant  $\lambda t^n$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a l'équivalent  $|f(t)| \sim |\lambda| t^n$ .

Si  $p < 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| t^n e^{-pt} = +\infty$ .

Ce résultat est encore vrai si  $p = 0$ .

En revanche, si  $p > 0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_p(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\lambda| t^n e^{-pt} = 0$ .

Ainsi  $f_p$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si  $p > 0$ . Donc  $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$ .

[Q]

2. (a) Soient  $p$  dans  $I(f)$ , et  $q > p$ . Il existe  $M \geq 0$  tel que  $|f_p(t)| \leq M$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}^+$ , on a  $f_q(t) = e^{(p-q)t} f_p(t)$  donc  $|f_q(t)| \leq M e^{(p-q)t}$ .

$f_q$  est continue et  $\lim_{+\infty} f_q = 0$ . Donc  $f_q$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . Ainsi  $]p, +\infty[ \subset I(f)$ . [Q]

- (b) – Supposons que  $I(f)$  ne soit pas une partie minorée de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $p$  de  $\mathbb{R}$ , il existe donc  $q$  dans  $I(f)$  tel que  $q < p$ .

On en déduit que  $I(f)$  contient  $]q, +\infty[$  donc contient  $]p, +\infty[$ .

Ainsi  $]p, +\infty[ \subset I(f)$  pour tout réel  $p$ . Il en découle  $I(f) = \mathbb{R}$ .

– Supposons que  $I(f)$  soit minorée. Soit  $\alpha = \inf I(f)$ . On a déjà  $I(f) \subset [\alpha, +\infty[$ .

Soit  $p > \alpha$ . Par définition de  $\alpha$ , il existe  $q$  dans  $] \alpha, p[$ , avec  $q \in I(f)$ .