Transformation de Laplace.

Partie I. Notations et définitions

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et continue.
Pour tout réel p, on note f_p l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_p(t) = \mathrm{e}^{-pt} f(t)$.
On note $I(f)$ l'ensemble des réels p tels que l'application f_p soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1. (a) Montrer sur un exemple qu'on peut avoir $I(f) = \emptyset$, ou au contraire $I(f) = \mathbb{R}$. [S]
   (b) Dans cette question, on suppose que f est une application polynomiale non nulle.
   Montrer que $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$ si f est non constante, et que $I(f) = \mathbb{R}^+$ sinon. [S]
2. Dans cette question, on suppose que $I(f)$ est non vide.
   (a) Soit p dans $I(f)$, et soit $q > p$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f_q = 0$.
   En déduire que l'intervalle $]p, +\infty[$ est inclus dans $I(f)$. [S]
   (b) En déduire que $I(f)$ est un intervalle de l'un des types suivants :
   $I(f) =]\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ou $I(f) = [\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On dira alors que α est l'*abscisse* de f. On la notera α_f ou $\alpha(f)$.
   Remarque : d'après (1b), l'abscisse de toute fonction polynomiale est 0. [S]
   (c) Soit A une fonction polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que l'application $g = Af$ a même abscisse que f. [S]
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, continues et telles que $I(f) \neq \emptyset$.
   Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que si $p > \alpha_f$ l'application f_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Pour tout réel $p > \alpha_f$, on pose alors $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_p = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On définit ainsi une application $\mathcal{L}(f)$ de $]\alpha_f, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$.
   On dit que $\mathcal{L}(f)$ est la *transformée de Laplace* de l'application f. [S]

Partie II. Premiers exemples

1. Dans cette question, on voit un premier exemple important de transformée de Laplace.
   Soit ω un nombre complexe. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{\omega t}$.
   (a) Montrer que f est un élément de $\mathcal{E}$ et que son abscisse est $\alpha_f = \mathrm{Re}\,(\omega)$. [S]
   (b) Montrer que $L(f)(p) = \dfrac{1}{p - \omega}$ pour tout $p > \mathrm{Re}\,(\omega)$.
   Pour exprimer ce résultat, on notera simplement $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\omega t}) = \dfrac{1}{p - \omega}$, pour $p > \mathrm{Re}\,(\omega)$.
   Si $\omega = 0$, on constate donc que $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{p}$, pour $p > 0$. [S]
2. (a) Soient f, g dans $\mathcal{E}$. Soient λ, μ dans $\mathbb{C}$. On pose $h = \lambda f + \mu g$.
   Montrer que h est dans $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{L}(h) = \lambda\mathcal{L}(f) + \mu\mathcal{L}(g)$ sur $]\max(\alpha_f, \alpha_g), +\infty[$. [S]
   (b) On considère les quatre applications $\begin{cases} t \mapsto \sin t \\ t \mapsto \cos t \end{cases}$, $\begin{cases} t \mapsto \mathrm{sh}\, t \\ t \mapsto \mathrm{ch}\, t \end{cases}$, définies sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que ces applications sont dans $\mathcal{E}$. Calculer leurs transformées de Laplace. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Partie III. Régularité de la transformée de Laplace d'une application

Dans cette question, f est un élément de $\mathcal{E}$ d'abscisse α_f.

On va vérifier certaines propriétés de l'application $F = \mathcal{L}(f)$ sur $I =]\alpha_f, +\infty[$.

1. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p) = 0$.

   Indication : utiliser un réel fixé $q > \alpha_f$, et se limiter à $p > q$. [S]

2. (a) Pour tout réel x, montrer que $|\,\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{|x|}}{2}$. [S]

   (b) Justifier l'existence sur I de $G_n(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]

   (c) On se donne les réels p_0, p, h tels que $\alpha_f < p_0 < p$ et $|h| \leq p - p_0$.

   Montrer que $|F(p+h) - F(p) + hG_1(p)| \leq \dfrac{h^2}{2}K$, avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-p_0 t}\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$. [S]

   (d) En déduire que F est dérivable sur I et que $\forall\, p \in I, F'(p) = -G_1(p)$.

   On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}(f(t))$. [S]

3. (a) Montrer plus généralement que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout p de I : $F^{(n)}(p) = (-1)^n G_n(p) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On notera que ce résultat peut s'écrire : $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\mathcal{L}(f(t))$. [S]

   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$ est $p \mapsto \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

   On exprime ce résultat en notant $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, pour $p > 0$. [S]

4. On va améliorer le résultat de (III.1), en prouvant que $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

   Il en découle (quand $p \to +\infty$) $F(p) \sim \frac{f(0)}{p}$ si $f(0) \neq 0$ et $F(p) = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{p}\Big)$ si $f(0) = 0$.

   On se donne un réel $\varepsilon > 0$, et un réel $a > 0$ tel que $0 \leq t \leq a \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$.

   Enfin p désigne un réel quelconque strictement supérieur à 0 et à α_f.

   (a) Montrer que $|pF(p) - f(0)| \leq \varepsilon + pK_p$, avec $K_p = \displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,|f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t$. [S]

   (b) On fixe un réel q tel que $q > \max(0, \alpha_f)$.

   Justifier l'existence d'un réel M majorant $t \mapsto \mathrm{e}^{-qt}\,|f(t) - f(0)|$ sur $\mathbb{R}^+$.
   En déduire l'inégalité $K_p \leq \frac{M}{p-q}\,\mathrm{e}^{(q-p)a}$, valable pour tout $p > q$. [S]

   (c) Conclure. [S]

5. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{C}$.

   (a) Prouver que l'abscisse de f est négative ou nulle. [S]

   (b) En s'inspirant de la méthode de la question (III.4), prouver que $\lim\limits_{p\to 0+} pF(p) = \ell$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Partie IV. Quelques propriétés de la transformation de Laplace

Dans cette partie, f désigne un élément de $\mathcal{E}$. On note $F = \mathcal{L}(f)$.

1. Dans cette question, on étudie les transformées de Laplace des dérivées de f.
   (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et que f' est élément de $\mathcal{E}$.
   Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$.
   Noter que cela redonne (avec des hypothèses plus fortes) le résultat de (III.4). [S]
   (b) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$.
   On suppose également que les applications $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont éléments de $\mathcal{E}$.
   On note α le maximum des abscisses de $f, f', \ldots, f^{(n)}$. Montrer que :
   $$\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = \;& p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\\ &= p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k}f^{(k-1)}(0) \quad (\text{pour tout } p > \alpha)\end{aligned}$$
   En déduire un développement limité de $F(p)$ au voisinage de $+\infty$. [S]
2. On étudie ici la transformée de Laplace d'une primitive de f.
   (a) On note g la primitive de f qui s'annule en 0 : $\forall t \geq 0,\ g(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$.
   Montrer que g est dans $\mathcal{E}$ (utiliser $p > \max(\alpha_f, 0)$.)
   Plus généralement, montrer que toute primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ est dans $\mathcal{E}$. [S]
   (b) Soit G la transformée de Laplace de l'application g.
   Montrer que sur un certain intervalle $]\alpha, +\infty[$, on a : $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. [S]
3. Dans cette question, on suppose que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = \ell \in \mathbb{C}$.
   On définit alors l'application h sur $\mathbb{R}^+$ par $h(0) = \ell$ et : $\forall t > 0,\ h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$.
   (a) Montrer que l'application h est élément de $\mathcal{E}$, ayant la même abscisse que f. [S]
   (b) Soit H la transformée de Laplace de h.
   Montrer que, pour tout $p > \alpha$, on a : $H(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} F(q)\,\mathrm{d}q$. [S]
   (c) En déduire que, pour tout $p > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan p$. [S]
4. Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
   On note g l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = f(\lambda t)$.
   (a) Montrer que g est dans $\mathcal{E}$ et que son abscisse vérifie $\alpha_g = \lambda\alpha_f$. [S]
   (b) Prouver que pour tout $p > \alpha_g$, on a $\mathcal{L}(g)(p) = \dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$. [S]
   (c) Donner les transformées de Laplace de $\begin{cases} t \mapsto \sin(\lambda t) \\ t \mapsto \cos(\lambda t) \end{cases}$, $\begin{cases} t \mapsto \operatorname{sh}(\lambda t) \\ t \mapsto \operatorname{ch}(\lambda t) \end{cases}$ [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Partie V. Le produit de convolution

Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout réel positif ou nul t, on pose $(f \star g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$.

On dit que l'application $f \star g$ est le *produit de convolution* de f et de g.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$. [S]
2. On se propose de montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on peut écrire : $(f \star g)(t) = t\displaystyle\int_0^1 f(vt)g(t-vt)\,\mathrm{d}v$.
   On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^1 f(vt)g(t-vt)\,\mathrm{d}v$, pour $t \geq 0$. [S]
   (b) On se donne un réel $a > 0$. Les applications f et g étant continues sur $\mathbb{R}^+$, elles sont bornées et uniforménent continues sur $[0, a]$.
   Montrer que l'application h est uniformément continue sur $[0, a]$ et conclure. [S]
3. Dans cette question, on note G la primitive de g qui s'annule à l'origine.
   Pour tout $a \geq 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t = (f \star G)(a)$.
   On admettra au besoin la possibilité d'intervertir les deux intégrales. [S]
4. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   (a) Déduire de la question précédente que pour tout $a \geq 0$ on a l'encadrement :
   $$\int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2a} (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t.$$ [S]
   (b) On suppose que f, g sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]
5. Dans cette question, on suppose que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   (a) Pour tout réel $a \geq 0$, prouver la majoration suivante :
   $$\left|\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a (f \star g)(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t \int_0^a |g(t)|\,\mathrm{d}t - \int_0^a (|f| \star |g|)(t)\,\mathrm{d}t$$ [S]
   (b) On suppose que f, g sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f \star g = \int_0^{+\infty} f \int_0^{+\infty} g$. [S]
6. Dans cette question, on suppose que f et g sont deux éléments de $\mathcal{E}$.
   (a) Pour toute application $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, on rappelle la notation $h_p : t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}h(t)$.
   Pour tout réel p, montrer l'égalité $(f \star g)_p = f_p \star g_p$. [S]
   (b) En déduire que $f \star g$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.
   On vérifiera que l'abscisse de $f \star g$ est inférieure ou égale à $\max(\alpha_f, \alpha_g)$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Partie VI. Extension aux applications continues par morceaux.

Il est possible d'étendre ce qui vient d'être fait au cas des applications continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats précédents se généralisent sans difficulté, à quelques modifications mineures près.

Dans ce qui suit, on modifie la définition de $\mathcal{E}$ en l'étendant aux applications continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, et en précisant que l'*abscisse* d'une application f de $\mathcal{E}$ est la borne inférieure des p de $\mathbb{R}$ tels que $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Il sera commode de considérer que les éléments f de $\mathcal{E}$ sont en fait définis sur $\mathbb{R}$ mais sont identiquement nuls sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Ainsi quand on écrit $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1}$, l'application f est définie par $\begin{cases} f(t) = \sin(t) \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ f(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

Il est clair que si on modifie un élément f de $\mathcal{E}$ en des points isolés (c'est-à-dire en un nombre fini de points sur chaque segment), alors l'application g obtenue est encore élément de $\mathcal{E}$, possède la même abscisse que f, et les deux applications f et g ont la même transformée de Laplace.

Voici les deux principales modifications à apporter à ce qui a déja été vu :

– Le résultat de (III.4) devient : $\lim\limits_{p\to\infty} p\mathcal{L}(f)(p) = f(0+)$.
– Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, et si $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont dans $\mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{(n)})(p) &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \\ &= p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad \text{(pour tout } p > \alpha) \end{aligned}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ un élément de $\mathcal{E}$, et $\lambda > 0$. On note F la transformée de Laplace de f.
   Soit g l'application définie par $g(t) = f(t-\lambda)$. En particulier $g(t) = 0$ si $t < \lambda$.
   (a) Montrer que g est élément de $\mathcal{E}$, avec la même abscisse que f. [S]
   (b) Montrer que la transformée de Laplace de g est $G : p \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda p} F(p)$.
   On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(f(t-\lambda)) = \mathrm{e}^{-\lambda p} \mathcal{L}(f)$. [S]
   (c) En déduire $\mathcal{L}(f)$ si f est définie par : $f(t) = 1$ sur $[0,1[$, et $f(t) = 0$ ailleurs. [S]
2. Soit f un élément de $\mathcal{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note F la transformée de Laplace de f.
   Soit h l'application définie par $h(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)$.
   (a) Montrer que h est dans $\mathcal{E}$. Déterminer son abscisse en fonction de celle de f. [S]
   (b) Montrer que la transformée de Laplace de h est $H : p \mapsto F(p+\lambda)$.
   On exprimera ce résultat en écrivant simplement : $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{-\lambda t} f)(p) = \mathcal{L}(f)(p+\lambda)$. [S]
3. Soit f un élément de $\mathcal{E}$. On suppose que f est T-périodique, avec $T > 0$.
   Soit $\widehat{f}$ l'application définie par $\widehat{f}(t) = f(t)$ sur $[0,T[$ et $\widehat{f}(t) = 0$ ailleurs.
   Soit F la transformée de Laplace de f, et soit $\widehat{F}$ celle de $\widehat{f}$.
   (a) Montrer qu'on a l'égalité $F(p) = \dfrac{\widehat{F}(p)}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}$, pour tout $p > 0$. [S]
   (b) En déduire $\mathcal{L}(f)$, si f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = |\sin t|$. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Corrigé du problème

Partie I. Notations et définitions

1. (a) – Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$.

Pour tout réel p, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_p(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t^2-pt} = +\infty$.

Ainsi l'application f_p n'est jamais bornée sur $\mathbb{R}^+$. Donc $I(f) = \emptyset$.

– Si on prend pour f l'application nulle, alors évidemment $I(f) = \mathbb{R}$.

– Un exemple moins trivial est fourni par l'application $t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.

En effet, pour tout réel p, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_p(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-pt} = 0$.

L'application f_p est continue sur $\mathbb{R}^+$ et elle a une limite finie en $+\infty$.

On en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et ceci pour tout réel p. Ainsi $I(f) = \mathbb{R}$.

[Q]

(b) L'application f est évidemment continue sur $\mathbb{R}^+$.

– Supposons que f soit une application constante $t \mapsto \lambda$, avec λ dans $\mathbb{C}^*$.

Si $p \geq 0$, alors $|f_p(t)| = |\lambda|\,\mathrm{e}^{-pt} \leq |\lambda|$ pour tout t de $\mathbb{R}^+$.

Si $p < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\,\mathrm{e}^{-pt} = +\infty$.

Ainsi f_p est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p \geq 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^+$.

– Supposons que f soit de degré $n \geq 1$, de terme dominant λt^n, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Quand t tend vers $+\infty$, on a l'équivalent $|f(t)| \sim |\lambda|\,t^n$.

Si $p < 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\,t^n\,\mathrm{e}^{-pt} = +\infty$.

Ce résultat est encore vrai si $p = 0$.

En revanche, si $p > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |f_p(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |\lambda|\,t^n\,\mathrm{e}^{-pt} = 0$.

Ainsi f_p est bornée sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > 0$. Donc $I(f) = \mathbb{R}^{+*}$.

[Q]

2. (a) Soient p dans $I(f)$, et $q > p$. Il existe $M \geq 0$ tel que $|f_p(t)| \leq M$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on a $f_q(t) = \mathrm{e}^{(p-q)t} f_p(t)$ donc $|f_q(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{(p-q)t}$.

f_q est continue et $\lim\limits_{+\infty} f_q = 0$. Donc f_q est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$. [Q]

(b) – Supposons que $I(f)$ ne soit pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Pour tout p de $\mathbb{R}$, il existe donc q dans $I(f)$ tel que $q < p$.

On en déduit que $I(f)$ contient $]q, +\infty[$ donc contient $]p, +\infty[$.

Ainsi $]p, +\infty[\subset I(f)$ pour tout réel p. Il en découle $I(f) = \mathbb{R}$.

– Supposons que $I(f)$ soit minorée. Soit $\alpha = \inf I(f)$. On a déjà $I(f) \subset [\alpha, +\infty[$.

Soit $p > \alpha$. Par définition de α, il existe q dans $]\alpha, p[$, avec $q \in I(f)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.