

Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives

PARTIE I : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES.

On dit qu'une application f définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} est un *polynôme trigonométrique* s'il existe une famille $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes, les c_k étant tous nuls sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, telle que pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$.

Dans cette partie, on suppose que $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique.

1. Pour tout p de \mathbb{Z} , calculer $I_p = \int_0^{2\pi} e^{ipx} dx$. [S]
2. En déduire que pour tout entier relatif m , on a l'égalité : $c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$. [S]
3. Soit $g : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique.

Montrer qu'on a l'égalité $g = f$ si et seulement si, pour tout k de \mathbb{Z} , on a $d_k = c_k$. [S]

4. On suppose que f n'est pas l'application nulle. Prouver le résultat suivant :

Il existe un unique couple (p, A) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-ipx} A(e^{ix}) \\ A(0) \neq 0 \end{cases}$ [S]

5. Vérifier que les applications $x \mapsto \cos^5 x$ et $x \mapsto \sin^5 x$ sont des polynômes trigonométriques. Écrire ces applications sous la forme indiquée dans la question précédente. [S]

PARTIE II : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES À VALEURS RÉELLES.

Dans cette partie, $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ est un polynôme trigonométrique à *valeurs réelles*.

On suppose $f \neq 0$, et on désigne toujours par (p, A) le couple défini dans la question I-4.

1. Montrer que pour tout entier relatif k , on a l'égalité : $c_{-k} = \overline{c_k}$. [S]
2. En déduire $p \geq 0$, et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=-p}^p c_k e^{ikx}$. Prouver que A est de degré $2p$.
Si on pose $A = \sum_{n=0}^{2p} \alpha_n X^n$, montrer que $\forall n \in \{0, \dots, 2p\}, \alpha_{2p-n} = \overline{\alpha_n}$. [S]
3. Montrer qu'il existe une famille unique $(a_0, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ de $2p+1$ réels telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^p (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

On vérifiera que $a_0 = c_0$ et $\forall k \in \{1, \dots, p\}, a_k = 2 \operatorname{Re} c_k$ et $b_k = -2 \operatorname{Im} c_k$. [S]

4. En utilisant la question II-2, Montrer que pour tout z de \mathbb{C}^* , on a $A(z) = z^{2p} \overline{A(1/\overline{z})}$. [S]
5. Soit $u = e^{i\theta}$ une racine de module 1 de A , de multiplicité m .

Montrer qu'on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(\sin \frac{x - \theta}{2} \right)^m g(x)$, avec $g(\theta) \neq 0$.

Montrer que si f est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , alors l'entier m est pair. [S]



6. Soit v une racine de A , avec la multiplicité $m \geq 1$, et telle que $|v| \neq 1$.
Montrer que $v \neq 0$ et que $v' = 1/\bar{v}$ est racine de A avec la même multiplicité.

Indication : écrire $A = (X - v)^m \sum_{k=0}^{2p-m} d_k X^k$ et utiliser la question II-4 [S]

PARTIE III : POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES À VALEURS DANS \mathbb{R}^+ .

Soit $f : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique non nul, à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

On pourra utiliser les résultats des parties I et II.

En particulier il existe p dans \mathbb{N} , et A dans $\mathbb{C}[X]$ (avec $\deg A = 2p$) tels que :

- Pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=-p}^p c_k e^{ikx} = e^{-ipx} A(e^{ix})$.
- Le coefficient c_p est non nul et pour tout k de $\{-p, \dots, p\}$, $c_{-k} = \bar{c}_k$
 1. En utilisant II-5 et II-6, montrer que A peut s'écrire $A = \lambda BC$ où :
 - Le facteur λ est une constante complexe non nulle.
 - Le polynôme B s'écrit sous la forme $B = \prod_{k=1}^r (X - e^{i\theta_k})^{2m_k}$, où :
 - ◇ Les réels θ_k sont distincts deux à deux modulo 2π .
 - ◇ Les m_k sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
 - ◇ L'entier r est positif ou nul. Si $r = 0$, on convient que $B = 1$.
 - Le polynôme C s'écrit sous la forme $C = \prod_{k=1}^s ((X - v_k)(X - 1/\bar{v}_k))^{n_k}$, où :
 - ◇ Les v_k sont des complexes de module < 1 , distincts deux à deux.
 - ◇ Les n_k sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.
 - ◇ L'entier s est positif ou nul. Si $s = 0$, on convient que $C = 1$.

On vérifiera que $\sum_{k=1}^r m_k + \sum_{k=1}^s n_k = p$. [S]

2. Soit x un réel, et soit z un nombre complexe non nul.
Établir l'égalité $|(e^{ix} - z)(e^{ix} - 1/\bar{z})| = |e^{ix} - z|^2 / |z|$. [S]
3. En déduire l'existence d'un polynôme Q de degré p tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |Q(e^{ix})|^2$.
On pourra noter que pour tout x de \mathbb{R} , on a $f(x) = |f(x)|$. [S]
4. On suppose que f est non constante. Cela implique donc $p \geq 1$.
L'application f étant continue, elle est bornée sur tout segment (admis ici.)
On note $M = \sup\{f(x), x \in [0, 2\pi]\}$ (f étant 2π -périodique, on a $M = \sup f$ sur \mathbb{R} .)
On note $Q = \sum_{k=0}^p \beta_k X^k$ le polynôme défini à la question précédente.
 - (a) En identifiant, prouver $c_0 = \sum_{k=0}^p |\beta_k|^2$ et $c_p = 2\bar{\beta}_0 \beta_p$. En déduire $c_0 \geq 2|c_p|$. [S]
 - (b) En considérant l'application $g : x \mapsto M - f(x)$, prouver $M \geq 4|c_p|$. [S]
 - (c) Montrer que $M = 4|c_p| \Leftrightarrow |\beta_0| = |\beta_p|$ et $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, \beta_k = 0$ [S]



PARTIE IV : UNE PROPRIÉTÉ DE MINIMUM.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on pose $M(P) = \sup_{[-1,1]} |P(x)|$.

Pour tout $n \geq 1$, on note \mathcal{U}_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui sont unitaires de degré n .

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout P de \mathcal{U}_n on a $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ et de déterminer l'unique polynôme de \mathcal{U}_n pour lequel on a l'égalité.

On définit une suite (Q_n) de polynômes par
$$\begin{cases} Q_0 = 2, & Q_1 = X \\ \forall n \geq 1, & Q_{n+1} = XQ_n - \frac{1}{4}Q_{n-1} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout $n \geq 1$, Q_n est un élément de \mathcal{U}_n , à coefficients réels. [S]
 - Prouver que pour tout réel t , et tout $n \geq 1$, on a : $\cos nt = 2^{n-1}Q_n(\cos t)$. [S]
 - Pour tout n de \mathbb{N}^* , vérifier que $M(Q_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$. [S]
- Dans la suite de cette partie, on fixe $n \geq 1$. Pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, on note $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$.
On a bien entendu les inégalités $x_0 = 1 > x_1 > \dots > x_k > \dots > x_{n-1} > x_n = -1$.
 - Calculer la valeur de Q_n en chacun des points x_k . [S]
 - On se donne un polynôme P de \mathcal{U}_n , à coefficients réels. Montrer que $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Indication : raisonner par l'absurde et considérer le polynôme $R = Q_n - P$.
On montrera que $R(x_k)$ a le signe de $(-1)^k$. [S]
 - On se donne un polynôme P de \mathcal{U}_n , à coefficients réels ou complexes.
Montrer que $M(P) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Indication : considérer le polynôme R dont les coefficients sont les parties réelles des coefficients de P . [S]
- On se donne un polynôme A de \mathcal{U}_n tel que $M(A) = \frac{1}{2^{n-1}}$.
L'objectif de cette question est de montrer que $A = Q_n$.
 - Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $Q(z) = 2^n z^n A\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$.
Préciser le degré de Q , son coefficient dominant et son coefficient constant. [S]
 - Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(e^{ix}) = 2^n e^{inx} A(\cos x)$, puis $\sup_{[0,2\pi]} |Q(e^{ix})| = 2$. [S]
 - En utilisant III-4, prouver que $Q = X^{2n} + 1$. [S]
 - Montrer alors que $A = Q_n$. Conclusion ? [S]