

## Variations sur la fonction Partie Entière

### RAPPELS ET NOTATIONS

Les définitions, notations et propriétés ci-dessous sont rappelées à toutes fins utiles, et aucune démonstration n'est demandée. Dans ces notations,  $x$  est un réel quelconque. Sauf indication contraire, tous les entiers considérés dans ce problème sont des entiers *relatifs*.

- On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$  (ou encore l'entier "plancher" de  $x$ ).  
C'est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .  
Il est donc caractérisé par  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ , c'est-à-dire par  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .
- On note  $\lceil x \rceil$  l'entier "plafond" de  $x$ .  
C'est le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ .  
Il est donc caractérisé par  $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$ , c'est-à-dire par  $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ .
- Il est clair que les applications  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  et  $x \mapsto \lceil x \rceil$  sont croissantes au sens large.
- Pour tout entier  $p$ , on a  $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow x \in [p, p + 1[ \\ \lceil x \rceil = p \Leftrightarrow x \in ]p - 1, p] \end{cases}$  et  $\begin{cases} \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\ \lceil x + p \rceil = \lceil x \rceil + p \end{cases}$

### ÉNONCÉ DU PROBLÈME

1. Pour tout réel  $x$ , vérifier que  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$  et que  $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ . [S]

2. Soit  $x$  un réel et  $p$  un entier. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x \leq p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq p \\ x < p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leq p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \leq x \Leftrightarrow p \leq \lceil x \rceil \\ p < x \Leftrightarrow p \leq \lceil x \rceil - 1 \end{cases} \quad [S]$$

3. On note  $N(I)$  le nombre d'entiers distincts appartenant à un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x$  et  $y$  des réels, avec  $x < y$ . Calculer  $N(I)$  dans les cas suivants :

$$I = ]x, y[, \quad I = [x, y[, \quad I = ]x, y], \quad I = [x, y].$$

On exprimera les réponses en fonction d'un ou plusieurs des entiers  $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor, \lceil x \rceil, \lceil y \rceil$ . [S]

4. (a) Soit  $x$  un réel, et  $k, n$  deux entiers ( $n > 0$ ). Prouver que  $\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$ . [S]

(b) Montrer que  $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$ . [S]

5. Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une application continue et croissante (au sens large) sur  $\mathbb{R}$ , et telle qu'on ait toujours l'implication  $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ .

(a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a  $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$ . [S]

(b) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a  $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$ .

On appréciera une démonstration qui ne serait trop proche de celle de 5.a... [S]

(c) Retrouver ainsi les résultats des questions 4a et 4b. [S]

6. Soit  $n$  un entier strictement positif.

On se propose de calculer les sommes  $S_n = \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$  et  $T_n = \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .

(a) On suppose tout d'abord qu'il existe  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $n = m^2$ .

En utilisant une partition de  $[1, \dots, n]$ , montrer que  $S_n = \frac{(m+1)(4m^2 - m)}{6}$ . [S]

(b) Montrer que dans le cas général,  $S_n = \frac{(m+1)(6n - 2m^2 - m)}{6}$ , avec  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . [S]

(c) Avec ces notations, en déduire que  $T_n = \frac{m(6n + 5 - 2m^2 - 3m)}{6}$ . [S]

7. Dans cette question,  $x$  est un réel,  $m$  est dans  $\mathbb{Z}$  et  $n$  est dans  $\mathbb{N}^*$ .

On se propose de calculer la somme  $U(m, n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x + km}{n} \right\rfloor$ .

(a) On commence par supposer  $m = 1$ . Montrer que  $U(1, n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x + k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

Indication : commencer par examiner le cas où  $x$  est dans  $\mathbb{Z}$ , puis généraliser. [S]

(b) On suppose maintenant que les entiers  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif autre que 1.)

Pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n-1\}$  on note  $f(k)$  le reste dans la division de  $km$  par  $n$ .

i. Montrer que  $\left\lfloor \frac{x + km}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + f(k)}{n} \right\rfloor + \frac{km}{n} - \frac{f(k)}{n}$ . [S]

ii. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\{0, \dots, n-1\}$  sur lui-même. [S]

iii. En déduire que  $U(m, n, x) = \lfloor x \rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2}$ . [S]

(c) On suppose enfin que les entiers  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  sont quelconques.

On note  $d$  le pgcd de  $m$  et de  $n$  (leur plus grand diviseur commun.)

Il existe donc deux entiers  $m' \in \mathbb{Z}$  et  $n' \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$ .

On sait enfin que  $m'$  et  $n'$  sont premiers entre eux.

i. En notant  $k = n'q + k'$  la division de  $k$  par  $n'$ , montrer que :

$$U(m, n, x) = \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + (n'q + k')m}{n} \right\rfloor = \sum_{q=0}^{d-1} \left( qm'n' + \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + k'm}{n} \right\rfloor \right) \quad [S]$$

ii. En déduire  $U(m, n, x) = m'n' \frac{d(d-1)}{2} + dU(m', n', \frac{x}{d})$ . [S]

iii. Conclure finalement, avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $d = \text{pgcd}(m, n)$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x + km}{n} \right\rfloor = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mn - m - n + d}{2}. \quad [S]$$

### Remarque

Par symétrie, le résultat précédent prouve que pour tout réel  $x$  et pour tous entiers  $m, n$

strictement positifs, on a l'égalité :  $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x + km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x + kn}{m} \right\rfloor$ .