Cercles orthogonaux. Faisceaux de cercles.

On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure usuelle de plan eulidien.

Pour tout point A et tout réel $r > 0$, on notera $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre A et de rayon r (on ne considérera dans ce problème que des cercles ayant un rayon strictement positif.)

Pour tous points A et B, on notera AB la longueur du segment $[A, B]$.

Première partie : cercles orthogonaux

On dit que deux cercles $\mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ sont *orthogonaux* si $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1. On se donne deux cercles quelconques $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$.

   Montrer que ces deux cercles sont sécants (c'est-à-dire se coupent en deux points disjoints) si et seulement si on a la double inégalité : $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$.

   En déduire que deux cercles orthogonaux sont sécants. [S]

2. Soit A l'un des deux points d'intersection de deux cercles sécants $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   Soit D_1 (resp. D_2) la tangente en A au cercle $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$).
   Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si D_1 et D_2 sont orthogonales. [S]

3. On se donne un cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$, et un point Ω_2.
   Montrer que Ω_2 est le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ orthogonal à $\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \Omega_2$ est extérieur à $\mathcal{C}_1$.
   Montrer que $\mathcal{C}_2$ est unique. En donner une construction à la règle et au compas. [S]

4. Pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, on note $\Phi_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
   $$\forall\, M(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \Phi_v(M) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$
   On note $\Gamma(v)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\Phi_v(M) = 0$.
   Pour tous $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$, on pose enfin $\varphi(v_1, v_2) = 2(a_1a_2 + b_1b_2) - c_1 - c_2$.

   (a) Discuter, en fonction du vecteur v, la nature de l'ensemble $\Gamma(v)$.
   Vérifier notamment que $\Gamma(v)$ est un cercle si et seulement si $\varphi(v, v) > 0$. [S]

   (b) Soient v_1, v_2 dans $\mathbb{R}^3$, tels que $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ et $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ soient des cercles du plan.
   Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\varphi(v_1, v_2) = 0$. [S]

5. (a) Déterminer les cercles orthogonaux simultanément à $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
   On illustrera le résultat par une figure. [S]

   (b) Même question en considérant maintenant les cercles $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 7 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ [S]

   (c) Même question avec $\begin{cases} \mathcal{C}_1 \text{ d'équation } (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ \mathcal{C}_2 \text{ d'équation } (x+3)^2 + y^2 = 6 \end{cases}$
   Vérifier en outre que les cercles obtenus passent par deux points fixes. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

Deuxième partie : axe radical de deux cercles

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle de centre Ω et de rayon r.

Pour tout M de $\mathbb{R}^2$, on dit que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\Omega M)^2 - r^2$ est la *puissance* de M par rapport à $\mathcal{C}$.

Avec cette définition, il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) > 0$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = 0$, resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) < 0$) si et seulement si M est extérieur (resp. appartient, resp. est intérieur) au cercle $\mathcal{C}$.

1. (a) Soit M un point du plan, et A, B deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.
   Montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M) = (\overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB})$. [S]

   (b) Soit M un point, et D une droite passant par M et rencontrant $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en P et Q.
   Montrer que $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)$ (on appréciera deux démonstrations.)
   Qu'obtient-on si la droite D est tangente au cercle $\mathcal{C}$? [S]

   (c) Réciproquement, soit D et Δ deux droites sécantes en un point M.
   On se donne deux points P, Q sur D et deux points R, S sur Δ.
   On suppose qu'on a l'égalité $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \overline{MR} \cdot \overline{MS}$.
   Montrer que les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques. [S]

2. Soient $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$ deux cercles non concentriques.

   On appelle *axe radical* de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et on note $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport à ces deux cercles.

   (a) Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ est une droite orthogonale à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$. [S]

   (b) Identifier $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ quand $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents ou sécants. [S]

   (c) Dans le cas où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont disjoints, donner une construction de la droite $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ à la règle et au compas (on pourra utiliser deux cercles auxiliaires).
   On fera deux figures (la première quand $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont extérieurs l'un à l'autre, et la deuxième quand l'un des deux cercles est intérieur à l'autre.) [S]

3. On se donne deux cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$, non concentriques.
   Montrer qu'un point Ω est le centre d'un cercle orthogonal à la fois à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ si et seulement si Ω est extérieur à ces deux cercles et appartient à leur axe radical. [S]

4. (a) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ dont les centres ne sont pas alignés.

   Montrer qu'il existe un unique point M du plan ayant même puissance par rapport aux trois cercles. Ce point est appelé *centre radical* des trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. [S]

   (b) Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

   Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est aussi le centre radical des trois cercles de diamètres respectifs AB, AC, BC. [S]

   (c) On se donne trois cercles $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1), \mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2), \mathcal{C}_3(\Omega_3, r_3)$, orthogonaux deux à deux.
   Montrer que l'axe radical de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ est l'orthocentre du triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

Troisième partie : faisceaux de cercles

Pour toute droite $\mathcal{D}$ et tout cercle $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ la réunion de $\mathcal{C}$ et de l'ensemble des cercles $\mathcal{C}'$ tels que $\Delta(\mathcal{C},\mathcal{C}')=\mathcal{D}$; $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est appelé *faisceau de cercles* engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

1. Dans cette question on décrit le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ selon la position de la droite $\mathcal{D}$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$. On accompagnera chacun des résultats obtenus d'une figure.
   (a) On suppose que la droite $\mathcal{D}$ rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts A, B.
   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles passant par A et B.
   On dit alors que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est le faisceau de *points de base* A et B. [S]
   (b) On suppose que la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en un point A.
   Établir que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles tangents à $\mathcal{D}$ en A. [S]
   (c) On suppose maintenant que la droite $\mathcal{D}$ ne rencontre pas le cercle $\mathcal{C}$.
   Soit H la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ du centre Ω de $\mathcal{C}$.
   Par le point H (qui est donc extérieur à $\mathcal{C}$), on mène le cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ orthogonal à $\mathcal{C}$.
   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est l'ensemble des cercles orthogonaux à $\widehat{\mathcal{C}}$ et centrés sur (ΩH).
   Si on note J, K les points d'intersection du cercle $\widehat{\mathcal{C}}$ et de la droite (ΩH), on dit que $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ est le faisceau de *points-limites* J, K. [S]

2. (a) Soit $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ trois cercles (deux à deux non concentriques) et $\mathcal{D}$ une droite du plan.
   On suppose que $\Delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\Delta(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_3)=\mathcal{D}$. Montrer que $\Delta(\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)=\mathcal{D}$. [S]
   (b) Soient $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ deux cercles non concentriques, et soit $\mathcal{D}$ une droite.
   Montrer que $\mathcal{C}'\in\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})\Leftrightarrow\mathcal{C}\in\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}')\Leftrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})=\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}')$. [S]

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $f(x,y)=0$, avec $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$.
   Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $\Phi(x,y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (cf question I.4.)
   (a) Pour tout point $M(x,y)$, montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(M)=\Phi(M)$. [S]
   (b) En déduire que l'équation de tout cercle du faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ s'écrit sous la forme $\Phi(x,y)+\lambda f(x,y)=0$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$. [S]
   (c) Montrer que tout point qui n'est pas sur $\mathcal{D}$ est sur un unique cercle de $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$. [S]

4. On se donne un cercle $\mathcal{C}$, une droite $\mathcal{D}$, et on note $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$.
   (a) On suppose qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est orthogonal à deux cercles distincts $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{F}$.
   Montrer qu'alors $\mathcal{C}'$ est orthogonal à tout cercle du faisceau $\mathcal{F}$.
   Indication : on formera l'équation générale d'un cercle de $\mathcal{F}$ et on utilisera I.4. [S]
   (b) Montrer qu'un cercle $\mathcal{C}'$ est orthogonal à tous les cercles du faisceau $\mathcal{F}$ si et seulement si il est centré sur $\mathcal{D}$ et orthogonal au cercle $\mathcal{C}$. [S]

5. Montrer que les cercles orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ forment eux-même un faisceau $\mathcal{F}'$. On dit alors que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux faisceaux orthogonaux (ou *conjugués.*)
   Décrire en particulier le faisceau $\mathcal{F}'$ dans chacun des cas étudiés dans la question III.1 [S]

6. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du faisceau de points-limites A, B.
   Montrer qu'il existe $\lambda>0$ (avec $\lambda\neq 1$) tel que : $\forall\, M\in\mathcal{C},\ \dfrac{MA}{MB}=\lambda$.
   Qu'obtient-on d'analogue avec un cercle du faisceau de points de base A, B ? [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

Corrigé du problème

Première partie : cercles orthogonaux

1. – *Condition pour que deux cercles soient sécants*

Quitte à effectuer un changement de repère, on peut toujours considérer que $\mathcal{C}_1$ est centré en O et que $\mathcal{C}_2$ est centré en $\Omega_2(\alpha, 0)$, avec $\alpha > 0$ (on exclut le cas $\alpha = 0$ qui correspond à deux cercles concentriques, disjoints si $r_1 \neq r_2$ et confondus si $r_1 = r_2$.)

On a $\alpha = \Omega_1\Omega_2$. L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 = r_1^2$, et celle de $\mathcal{C}_2$ est $(x-\alpha)^2 + y^2 = r_2^2$.

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants $\Leftrightarrow (S)$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$ possède deux solutions distinctes.

On a $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ -2\alpha x + \alpha^2 + r_1^2 = r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = x_0 = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2) \text{ et } y^2 = r_1^2 - x_0^2\right)$.

Ce système possède deux solutions distinctes si et seulement si $x_0^2 < r_1^2$. Or :

$$x_0^2 < r_1^2 \Leftrightarrow (\alpha^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 < 4\alpha^2 r_1^2 \Leftrightarrow -2\alpha r_1 < \alpha^2 + r_1^2 - r_2^2 < 2\alpha r_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + r_1)^2 > r_2^2 \\ (\alpha - r_1)^2 < r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + r_1 > r_2 \\ -r_2 < \alpha - r_1 < r_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > r_2 - r_1 \\ r_1 - r_2 < \alpha < r_1 + r_2 \end{cases}$$

Ce système équivaut à $|r_2 - r_1| < \alpha < r_1 + r_2$, ce qu'il fallait démontrer.

– *Deux cercles orthogonaux sont sécants*

On se donne deux cercles orthogonaux $\mathcal{C}_1(\Omega_1, r_1)$ et $\mathcal{C}_2(\Omega_2, r_2)$.

On a donc l'égalité $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Mais on a toujours l'inégalité $|r_2 - r_1| < \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < r_1 + r_2$ (élever au carré.)

Il en résulte que $|r_2 - r_1| < \Omega_1\Omega_2 < r_1 + r_2$: les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants.

[Q]

2. – Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux, on a $r_1^2 + r_2^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = (\Omega_1\Omega_2)^2$.

Cette égalité signifie que le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est rectangle en A.

Dans ces conditions, la tangente à $\mathcal{C}_1$ en A est la droite $(A\Omega_2)$.

De même la tangente à $\mathcal{C}_2$ en A est la droite $(A\Omega_1)$.

Les tangentes en A à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc les droites orthogonales $(A\Omega_1)$ et $(A\Omega_2)$.

– Inversement, supposons que les tangentes en A aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient orthogonales.

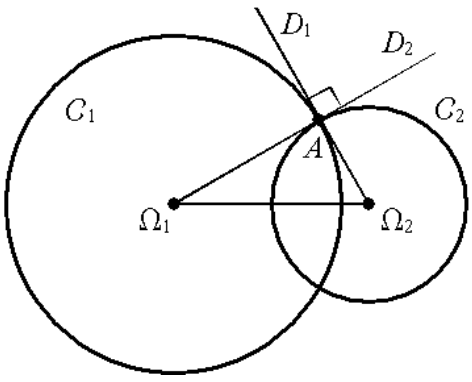
La droite D_2, orthogonale en A à la tangente en A à $\mathcal{C}_1$, est donc un diamètre de $\mathcal{C}_1$, autrement dit elle passe par Ω_1.

De même, la droite D_1 est un diamètre de $\mathcal{C}_2$ donc passe par Ω_2. Ainsi les droites $(A\Omega_1)$ et $(A\Omega_2)$, égales à D_2 et D_1, sont orthogonales.

Le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est donc rectangle en A.

Ainsi $(\Omega_1\Omega_2)^2 = (A\Omega_1)^2 + (A\Omega_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont donc orthogonaux.

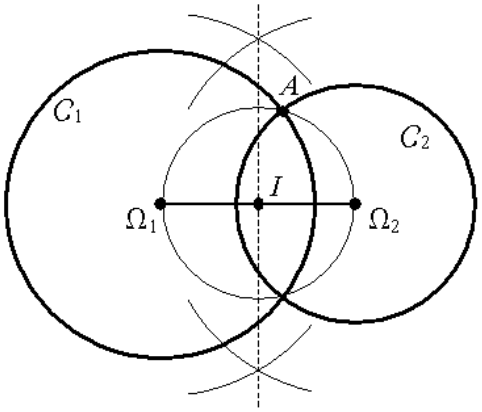


[Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

3. Supposons que Ω_2 soit le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ orthogonal à $\mathcal{C}_1$.
Alors $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} > r_1$, ce qui prouve que Ω_2 est extérieur à $\mathcal{C}_1$.
Réciproquement, on suppose que Ω_2 est extérieur à $\mathcal{C}_1$.
Supposons que $\mathcal{C}_2$ existe, et soit A l'un des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$.
D'après la question précédent, le triangle $\Omega_1 A \Omega_2$ est rectangle en A.
Autrement dit A est sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $\Omega_1\Omega_2$.
Le cercle $\mathcal{C}$ rencontre effectivement $\mathcal{C}_1$ en deux points distincts.
On nomme A l'un de ces deux points, ce qui détermine $\mathcal{C}_2$ de manière unique (cercle centré en Ω_2 et de rayon $r_2 = \Omega_2 A$.)
Pour construire $\mathcal{C}_2$ à la règle et au compas, on mène deux cercles sécants centrés respectivement en Ω_1 et Ω_2, et de même rayon.
La droite joignant leurs points d'intersection est la médiatrice du segment $[\Omega_1, \Omega_2]$. Cette médiatrice fournit le milieu I de ce segment.
On peut alors tracer le cercle de diamètre $\Omega_1\Omega_2$. Celui-ci rencontre $\mathcal{C}_1$ en deux points.
Si A est l'un d'eux, alors $\mathcal{C}_2$ est le cercle centré en Ω_2 et de rayon $r_2 = \Omega_2 A$.



[Q]

4. (a) On a $M(x,y) \in \Gamma(v) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$.
◇ Si $a^2 + b^2 - c < 0$, alors $\Gamma(v)$ est l'ensemble vide.
◇ Si $a^2 + b^2 - c = 0$, alors l'ensemble $\Gamma(v)$ se réduit au point (a,b).
◇ Si $a^2 + b^2 - c > 0$, $\Gamma(v)$ est le cerle de centre (a,b) et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
Pour tout $v(a,b,c)$, on a $\varphi(v,v) = 2(a^2 + b^2 - c)$.
Donc $\Gamma(v)$ est un cercle $\Leftrightarrow \varphi(v,v) > 0$. Le rayon $\Gamma(v)$ est alors : $r = \sqrt{\frac{1}{2}\varphi(v,v)}$. [Q]

(b) Posons $\begin{cases} v_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ v_2 = (a_2, b_2, c_2) \end{cases}$. Par hypothèse, on a $\begin{cases} r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1 > 0 \\ r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2 > 0 \end{cases}$
On obtient alors successivement :
$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 &= a_1^2 + b_1^2 - c_1 + a_2^2 + b_2^2 - c_2 - (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 \\ &= 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) - c_1 - c_2 = \varphi(v_1, v_2). \end{aligned}$$
Ainsi, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 - (\Omega_1\Omega_2)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(v_1, v_2) = 0$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

5. On cherche les cercles solutions $\mathcal{C}(\Omega, r)$ par leur centre (a, b) et leur rayon r.
Avec ces notations, on a $\mathcal{C} = \Gamma(v)$, avec $v = (a, b, c)$ et $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.

(a) Notons que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ avec $\Omega_1 = (-1, 0)$ et $r_1 = 1$.
L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 + 2x = 0$, donc $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ avec $v_1 = (-1, 0, 0)$.
De même, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ avec $\Omega_2 = (2, 0)$ et $r_2 = 2$.
L'équation de $\mathcal{C}_2$ est $x^2 + y^2 - 4x = 0$, donc $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ avec $v_1 = (2, 0, 0)$.
$\mathcal{C}$ est orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - c = 0 \\ 4a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
Les solutions sont les cercles d'équation $x^2 + y^2 - 2by = 0$ c'est-à-dire $x^2 + (y - b)^2 = b^2$.
Ce sont les cercles centrés sur l'axe Oy et qui passent par l'origine.
On a représenté (fig 5a) les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux (ils sont tous centrés sur la tangente commune à $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.) [Q]

(b) Notons que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, r_1)$ avec $\Omega_1 = (2, 0)$ et $r_1 = \sqrt{7}$.
L'équation de $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$, donc $\mathcal{C}_1 = \Gamma(v_1)$ avec $v_1 = (2, 0, -3)$.
De même, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, r_2)$ avec $\Omega_2 = (-1, 0)$ et $r_2 = 2$.
L'équation de $\mathcal{C}_2$ est $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, donc $\mathcal{C}_2 = \Gamma(v_2)$ avec $v_1 = (-1, 0, -3)$.
$\mathcal{C}$ est orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(v, v_1) = 0 \\ \varphi(v, v_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - c + 3 = 0 \\ -2a - c + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 3 \end{cases}$
Les solutions sont les cercles d'équation $x^2 + y^2 - 2by + 3 = 0$ ($\Leftrightarrow x^2 + (y - b)^2 = b^2 - 3$.)
Ce sont les cercles centrés en $(0, b)$, de rayon $r = \sqrt{b^2 - 3}$ (avec $|b| > \sqrt{3}$.)
On a représenté (fig 5b) les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que quelques-uns des cercles qui leur sont orthogonaux, et qui sont donc centrés à l'extérieur de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, sur la droite qui joint leurs deux points d'intersection (eux-mêmes situés en $(0, \pm\sqrt{3})$.)

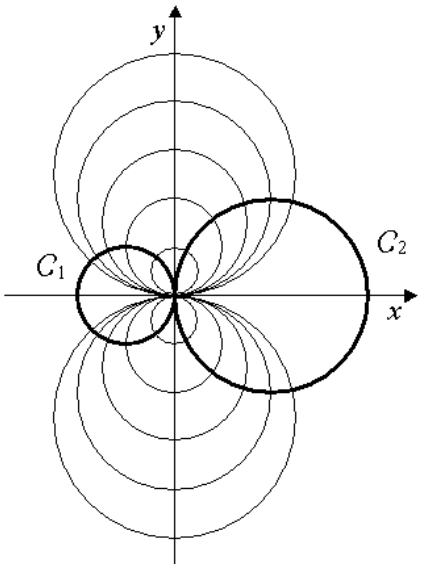


figure 5a

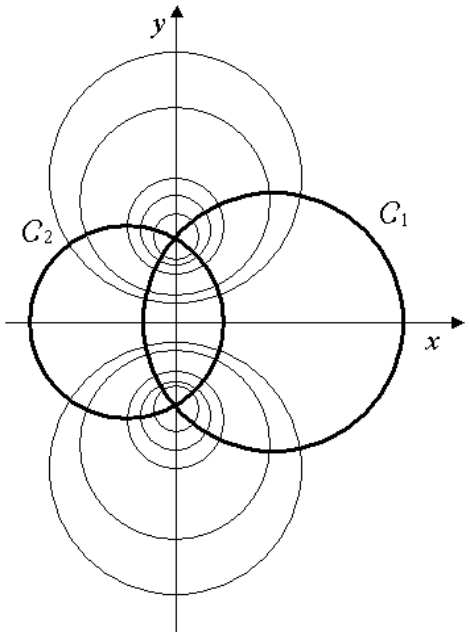


figure 5b

[Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.