Podaires d'une parabole

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure canonique de plan euclidien orienté.

On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2x$, et F le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ (le *foyer* de $\mathcal{P}$.)

Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ s'écrit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, avec $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Première partie

On oriente la parabole $\mathcal{P}$ dans le sens des t croissants (donc dans le sens des ordonnées croissantes.)

On fixe l'origine des abscisses curvilignes en O (donc au sommet de la parabole.)

1. Calculer l'abscisse curviligne s du point $M(t)$.
   Préciser la base de Frenet au point $M(s)$. [S]
2. Calculer le rayon de courbure R au point $M(s)$.
   Soit $\Omega(t)$ le centre de courbure de $\mathcal{P}$ en $M(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $\Omega(t)$ sont données par $\begin{cases} x_\Omega(t) = 1 + \frac{3}{2}\,t^2 \\ y_\Omega(t) = -t^3 \end{cases}$ [S]
3. On note $\mathcal{Q}$ la courbe décrite par $\Omega(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$ (c'est la *développée* de $\mathcal{P}$.)
   Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{Q}$ est : $y^2 = \frac{8}{27}\,(x-1)^3$.
   Vérifier que toute normale à $\mathcal{P}$ est une tangente à $\mathcal{Q}$.
   Représenter conjointement les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. [S]

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on désigne par $A(a, b)$ un point fixé du plan.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 \geq 2x$ est appelé *extérieur* de $\mathcal{P}$.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 > 2x$ est l'*extérieur strict* de $\mathcal{P}$.

On définit aussi l'intérieur $(y^2 \leq 2x)$ et l'intérieur strict $(y^2 < 2x)$ de $\mathcal{P}$.

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M(t)$ de $\mathcal{P}$. [S]
2. Soit $H(t)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
   Montrer que les coordonnées de $H(t)$ sont données par :
   $$X(t) = \frac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} \qquad \text{et} \qquad Y(t) = \frac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2+1)}$$
   Quand t décrit $\mathbb{R}$, le point $H(t)$ décrit une courbe notée Γ_A ou $\Gamma(a, b)$.
   On dit que Γ_A est la *podaire de $\mathcal{P}$ par rapport à A*. [S]
3. Montrer que la courbe Γ est toute entière incluse dans l'extérieur de $\mathcal{P}$. [S]
4. Montrer que $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, -b)$ se déduisent l'une de l'autre par une symétrie.
   Que peut-on dire, en particulier, des courbes $\Gamma(a, 0)$? [S]
5. Décrire Γ_A quand $A = F(\frac{1}{2}, 0)$. On fera une figure illustrant cette situation. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Troisième partie

On garde les notations des parties I et II.

On va procéder à des études locales des podaires de la parabole $\mathcal{P}$. Dans cette partie, plusieurs questions ont des réponses géométriques simples, que l'on préférera bien sûr à des débauches de calculs.

1. Préciser le placement de Γ_A par rapport à sa branche infinie et illustrer les différents cas (on pourra se limiter à $b \geq 0$, avec $A \neq F$.) [S]

2. (a) Montrer que A appartient à Γ_A si et seulement si A est extérieur à $\mathcal{P}$. [S]

   (b) Montrer que si Γ_A présente un point double B, alors nécessairement $B = A$. [S]

   (c) Inversement montrer que A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. [S]

3. (a) On suppose que $A(a,b)$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. Montrer que les deux tangentes à Γ_A au point A sont respectivement orthogonales aux deux tangentes à $\mathcal{P}$ menées par A. [S]

   (b) Si $A(a,b)$ est sur $\mathcal{P}$, Montrer que la tangente en A à Γ_A est la normale en A à $\mathcal{P}$. [S]

4. Dans cette question, on va utiliser le paramétrage de $\mathcal{P}$ par une abscisse curviligne s, comme on l'a vu dans la partie I. Le point $M(t)$ sera aussi noté $M(s)$ en référence à ce paramétrage.
   On notera $R(s)$ le rayon de courbure à la parabole $\mathcal{P}$ au point $M(s)$.

   On notera aussi $\mathcal{D}(s)$ la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(s)$, et $H(s)$ la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(s)$.
   L'abscisse curviligne s de $\mathcal{P}$ définit donc aussi une représentation paramétrique de la podaire Γ_A (mais attention : ce n'est pas une abscisse curviligne sur Γ_A.)

   (a) Pour tout s, justifier l'égalité $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$, avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))$. [S]

   (b) On désigne par $\overrightarrow{H'(s)}$ le vecteur dérivé, par rapport à s, de la position du point $H(s)$.
   Montrer que $\overrightarrow{H'(s)} = \dfrac{1}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\ \overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\ \overrightarrow{N}(s)\right]$ [S]

   (c) Prouver que si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors la courbe Γ_A est sans point stationnaire. [S]

   (d) Prouver que si A appartient à $\mathcal{P}$, alors A est le seul point stationnaire de Γ_A. [S]

5. Dans cette question, on suppose que le point $A(a,b)$ est quelconque.

   Pour tout réel m, soit Δ_m la droite passant par A, de coefficient directeur m.

   (a) Montrer que Δ_m est normale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $m^3 + 2(1-a)m + 2b = 0$.
   Il est donc clair que par A passent au moins une et au plus trois normales distinctes à $\mathcal{P}$. [S]

   (b) Discuter le nombre n_A de normales à $\mathcal{P}$ qui passent par $A(a,b)$.
   On montrera en particulier que $n_A = 3 \Leftrightarrow a > 1$ et $|b| < (\frac{2}{3}(a-1))^{3/2}$.
   Faire une figure représentant les trois normales issues de $A(15/2, 6)$. [S]

   (c) Soit $M(t_0)$ le pied sur $\mathcal{P}$ de l'une quelconque des normales à $\mathcal{P}$ passant par A, avec $M(t_0) \neq A$.
   Montrer que $M(t_0)$ est un point de Γ_A et préciser la tangente en Γ en ce point.
   Indication : utiliser les notations de la question III.4.

   On pourra rapidement illustrer deux cas de figure avec un point A à partir duquel on peut mener trois normales à $\mathcal{P}$ (A étant successivement intérieur puis extérieur à $\mathcal{P}$.) [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Quatrième partie

Cette partie est consacrée à l'étude des points d'inflexion éventuels de la courbe Γ_A.
Pour cela, on reprend les notations de la question III4, et en particulier les résultats de III4a et III4b.

1. En dérivant par rapport à s l'égalité obtenue dans III4b, prouver que :
$R'(s)\overrightarrow{H'(s)} + R(s)\overrightarrow{H''(s)} = \dfrac{2}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\,\overrightarrow{N}(s) - (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\,\overrightarrow{T}(s)\right] - \overrightarrow{N}(s)$ [S]
2. Par un calcul dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$, en déduire :
$R^3(s)\det(\overrightarrow{H'(s)}, \overrightarrow{H''(s)}) = 2\|\overrightarrow{AM(s)}\|^2 + (\overrightarrow{AM(s)} \mid R(s)\overrightarrow{N}(s))$ [S]
3. On définit le polynôme $P_A(t) = bt^3 + \frac{3}{2}(1-2a)t^2 - 3bt + 2a^2 + 2b^2 - a$.
Montrer que $H(t_0)$ est un point d'inflexion de Γ_A si P_A s'annule en changeant de signe en t_0. [S]
4. Dans cette question uniquement, on suppose $b = 0$.
Discuter suivant a le nombre de points d'inflexion sur Γ_A. [S]
5. Dans cette question, on suppose $b \neq 0$.
   (a) Vérifier que la dérivée P'_A de P_A s'annule en deux points distincts t_1 et t_2. [S]
   (b) Effectuer la division euclidienne de P_A par P'_A. [S]
   (c) En déduire qu'on a l'égalité $P_A(t_1)P_A(t_2) = 4\,\|\overrightarrow{AF}\|^4\left(1 - \dfrac{2a}{b^2}\right)$. [S]
   (d) Discuter le nombre d'inflexions de Γ_A suivant la position de A par rapport à $\mathcal{P}$. [S]
6. On se propose de trouver les points d'inflexion par une autre méthode.
Pour cela on va trouver une caractérisation pour que trois points de Γ_A soient alignés.
   (a) On se donne trois points $H(t_1)$, $H(t_2)$, $H(t_3)$ de Γ_A, de paramètres t_1, t_2, t_3 distincts.
On note $\begin{cases}\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ \sigma_3 = t_1t_2t_3\end{cases}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} X(t_1) & X(t_2) & X(t_3) \\ Y(t_1) & Y(t_2) & Y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
Montrer que $H(t_1), H(t_2), H(t_3)$ sont alignés $\Leftrightarrow 2b(\sigma_1 - \sigma_3) + (2a-1)\sigma_2 = 4a^2 + 4b^2 - 2a$. [S]
   (b) On admet qu'une droite $\mathcal{D}$ du plan est une tangente d'inflexion de la courbe Γ_A si l'équation aux points d'intersection de cette droite avec Γ_A admet une racine triple.
Avec cette idée, retrouver la condition pour que $H(t)$ soit un point d'inflexion sur Γ_A. [S]

Cinquième partie

Dans cette partie, on étudie et on trace quelques courbes Γ_A. Dans chaque cas, on précisera l'asymptote, et le cas échéant les points doubles, les points stationnaires et les points d'inflexion.

1. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (-5/2, 0)$. [S]
2. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (0, 0)$. [S]
3. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 0)$. [S]
4. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 2)$. [S]
5. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 4)$. [S]
6. Étudier et tracer la courbe Γ_A quand $A = (8, 6)$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Corrigé du problème

Première partie

1. L'abscisse curviligne de $M(t)$ est $s = \displaystyle\int_0^t \|\overrightarrow{OM'(u)}\|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u$.

   On intègre par parties (autre méthode : poser $u = \operatorname{sh}\varphi$.)

   $I = \displaystyle\int_0^t \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \Big[u\sqrt{u^2+1}\Big]_0^t - \int_0^t \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = t\sqrt{t^2+1} - I + \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}$.

   On en déduit $s = \dfrac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \dfrac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})$

   On a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{t^2+1}$, puis $\overrightarrow{T}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix}$. [Q]

2. On trouve $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-t}{(t^2+1)^2}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{-1}{(t^2+1)^2}\begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix}$.

   On connait l'égalité $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R}$. On en déduit $R(s) = -(t^2+1)^{3/2}$.

   On a $\Omega(t) = M(t) + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}t^2\\t\end{pmatrix} - (t^2+1)\begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{3}{2}t^2\\-t^3\end{pmatrix}$. [Q]

3. Puisque $x_\Omega = 1+\frac{3}{2}t^2$ et $y_\Omega = -t^3$, on a : $y_\Omega^2 = t^6 = \left(t^2\right)^3 = \left(\frac{2}{3}(x_\Omega-1)\right)^3 = \frac{8}{27}(x_\Omega-1)^3$.

   Réciproquement, soit $B(x,y)$ un point de la courbe d'équation $y^2 = \frac{8}{27}(x-1)^3$.

   Posons $t = -y^{1/3}$, donc $y = -t^3$. On a $\frac{8}{27}(x-1)^3 = y^2 = t^6 = (t^2)^3$ donc $\frac{2}{3}(x-1) = t^2$.

   Ainsi $x = 1+\frac{3}{2}t^2$ et $B = (1+\frac{3}{2}t^2, -t^3)$ est le point $\Omega(t)$.

   Conclusion : la courbe $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $y^2 = \frac{8}{27}(x-1)^3$.

   Soit Δ la normale à $\mathcal{P}$ en $M(t)$. Cette droite passe par $\Omega(t)$ et est dirigée par $(-1,t)$.

   D'autre part $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t} = (3t, -3t^2) = -3t(-1,t)$.

   Pour $t \neq 0$, la tangente en $\Omega(t)$ à $\mathcal{Q}$ est donc également dirigée par $(-1,t)$.

   Ceci est vrai aussi quand $t = 0$ (car la tangente en $\Omega(0) = (1,0)$ à $\mathcal{Q}$ est horizontale.)

   Conclusion : la normale en $M(t)$ à la parabole $\mathcal{P}$ est la tangente en $\Omega(t)$ à sa développée Q.

   Remarque : le résultat précédent est un cas particulier d'une propriété générale des développées.

   La courbe $\mathcal{Q}$ est la réunion des courbes $y = \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}$ et $y = -\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^{3/2}$.

   Ces deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe Ox.

   Leur tracé ne pose pas de problème : il y a une demi-tangente horizontale au point $\Omega(0) = (1,0)$ (il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce pour la courbe $\mathcal{Q}$.)

   On constate que $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ se rencontrent en deux points symétriques par rapport à Ox.

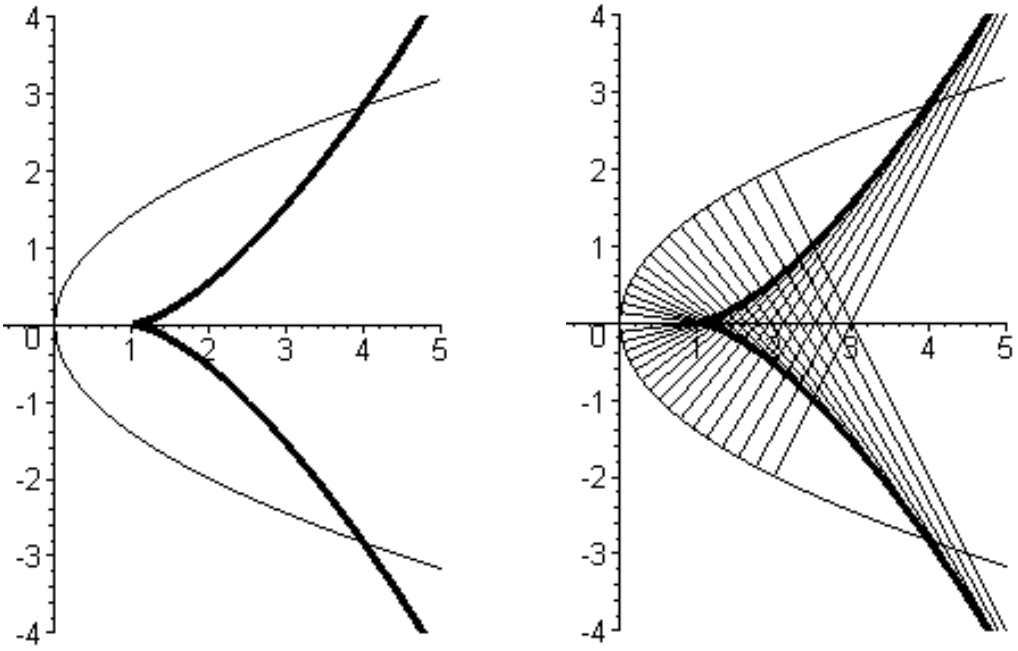
   Plus précisément, $\begin{cases} y^2 = 2x \\ 27y^2 = 8(x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)^3 - 27x = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Voici une partie de la représentation graphique de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ (cette dernière en trait gras.)

A droite, on a représenté un certain nombre de normales à $\mathcal{P}$: ce sont toutes des tangentes à $\mathcal{Q}$.



[Q]

Deuxième partie

1. Pour tout réel t, un vecteur directeur de $\mathcal{D}(t)$ est $M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (t, 1)$.

   Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(t)$ est donc :

   $$\begin{vmatrix} X & x(t) & x'(t) \\ Y & y(t) & y'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & \frac{1}{2}t^2 & t \\ Y & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow X - tY + \frac{1}{2}t^2 = 0$$

   [Q]

2. Un vecteur orthogonal à $M'(t) = (t, 1)$ est $v(t) = (-1, t)$.

   Il existe un réel λ (dépendant de t) tel que $H(t) = A + \lambda v(t) = (a - \lambda, b + \lambda t)$.

   On exprime que $H(t) = (X(t), Y(t))$ appartient à $\mathcal{D}(t)$:

   $X(t) - tY(t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda) - t(b + \lambda t) + \frac{1}{2}t^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{t^2 - 2bt + 2a}{2(t^2 + 1)}$

   On trouve $X(t) = a - \lambda = \dfrac{(2a - 1)t^2 + 2bt}{2(t^2 + 1)}$ et $Y(t) = b + \lambda t = \dfrac{t^3 + 2at + 2b}{2(t^2 + 1)}$ [Q]

3. On pourrait montrer l'inégalité $Y^2(t) \geq 2X(t)$ pour tout réel t, mais ce serait maladroit.

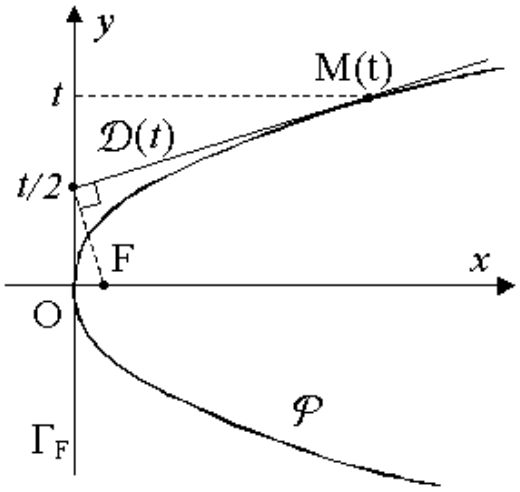
   En fait Γ_A est incluse dans l'extérieur de $\mathcal{P}$ parce que les points de Γ_A appartiennent à des tangentes à $\mathcal{P}$, et que celles-ci sont toutes dans l'extérieur de $\mathcal{P}$: c'est une conséquence de la convexité de l'application $y \mapsto \frac{1}{2}\, y^2$.

   On peut aussi noter que l'équation de $\mathcal{D}(t)$ s'écrit $2X = 2tY - t^2$. Pour tout point (X, Y) de la droite $\mathcal{D}(t)$, on a donc $Y^2 - 2X = Y^2 - 2tY + t^2 = (Y - t)^2 \geq 0$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

4. Ox est axe de symétrie de $\mathcal{P}$. De même (a,b) et $(a,-b)$ sont symétriques par rapport à Ox.
   Il est donc logique que $\Gamma(a,-b)$ se déduise de $\Gamma(a,b)$ dans la symétrie d'axe Ox.
   Pour le vérifier notons $H(t)=(X(t),Y(t))$ sur $\Gamma(a,b)$ et $\widetilde{H}(t)=(\widetilde{X}(t),\widetilde{Y}(t))$ sur $\Gamma(a,-b)$.
   On constate que $\widetilde{X}(t)=\dfrac{(2a-1)t^2-2bt}{2(t^2+1)}=X(-t)$ et $\widetilde{Y}(t)=\dfrac{t^3+2at-2b}{2(t^2+1)}=-Y(-t)$.
   Les points $\widetilde{H}(t)$ et $H(-t)$ sont donc symétriques par rapport à Ox.
   Il en découle que les courbes $\Gamma(a,b)$ et $\Gamma(a,-b)$ sont symétriques par rapport à cet axe.
   En particulier Ox est axe de symétrie de chaque courbe $\Gamma(a,0)$. [Q]
5. On suppose ici $A=F(\frac{1}{2},0)$. Le point A est donc le *foyer* de la parabole.
   Dans ce cas, et pour tout réel t : $X(t)=0$ et $Y(t)=\dfrac{t}{2}$.
   La courbe Γ_A est donc la droite $x=0$.
   La podaire d'une parabole $\mathcal{P}$ par rapport à son foyer est donc la tangente au sommet de $\mathcal{P}$.
   La figure illustre la situation : la tangente $\mathcal{D}(t)$ au point $M=(\frac{t^2}{2},t)$ rencontre Oy en $H(t)=(0,\frac{t}{2})$.
   Le point $H(t)$ est aussi la projection orthogonale du foyer F sur la tangente $\mathcal{D}(t)$.



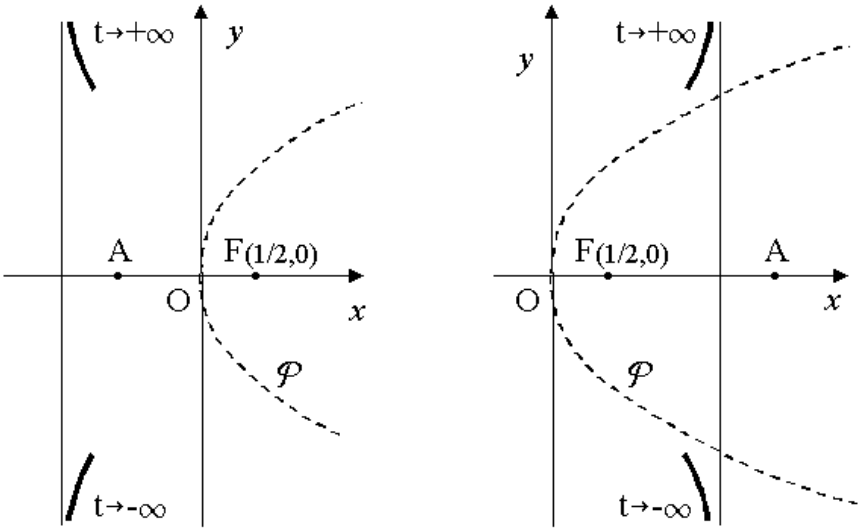
[Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

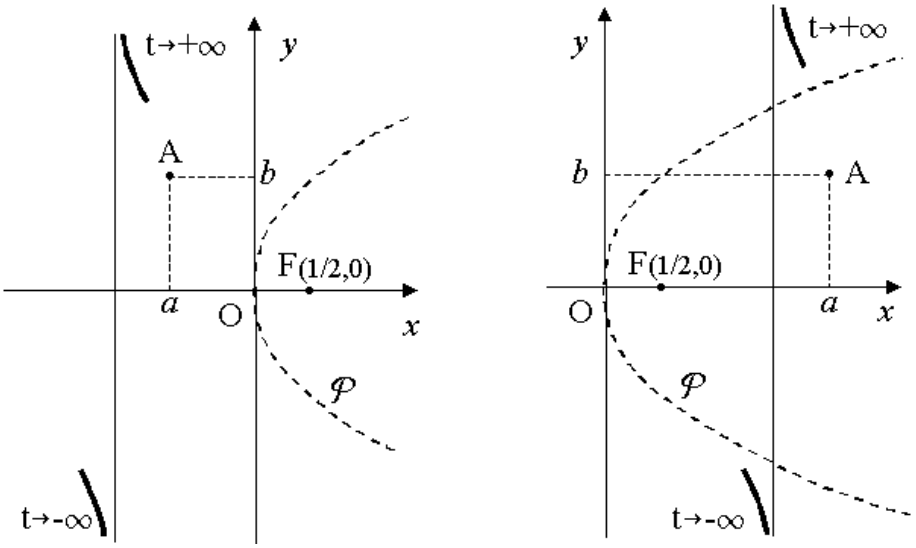
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Troisième partie

1. Γ_A n'a qu'une branche infinie, quand $t \to \pm\infty$. On a alors $X(t) \sim a - \frac{1}{2}$ et $Y(t) \sim \frac{t}{2}$.
   Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = a - \frac{1}{2}$.
   D'autre part $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{(2a-1)t^2 + 2bt}{2(t^2+1)} - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{2bt - (2a-1)}{2(t^2+1)}$.
   – Si $b = 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) = \dfrac{1-2a}{2(t^2+1)}$, qui a toujours le signe de $1 - 2a$.
   La courbe est donc toujours à droite de son asymptote si $a < \frac{1}{2}$ et toujours à gauche sinon.
   – Si $b > 0$, on a $X(t) - (a - \frac{1}{2}) \sim \frac{b}{t}$.
   La courbe est donc à droite de son asymptote quand $t \to +\infty$, et à gauche sinon.
   Voici une illustration du cas $b = 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis $b = 0$ et $a > \frac{1}{2}$.



   Ensuite voici le cas $b > 0$ et $a < \frac{1}{2}$, puis le cas $b > 0$ et $a > \frac{1}{2}$.



[Q]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

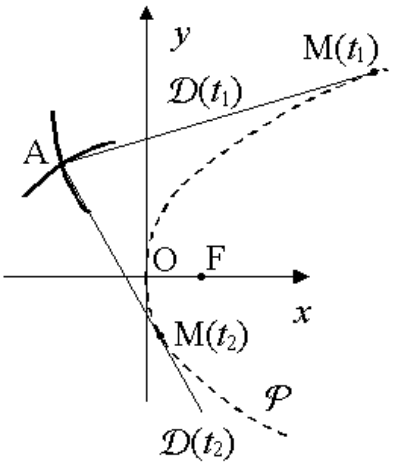
2. (a) Dire que A appartient à Γ_A, c'est dire qu'il existe t tel que $A = H(t)$.
Mais on sait que $H(t)$ est toujours la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$.
Écrire que $A = H(t)$ c'est donc écrire que A appartient à la tangente $\mathcal{D}(t)$.
On sait que l'équation de la tangente $\mathcal{D}(t)$ à $\mathcal{P}$ en $M(t)$ est $2X - 2tY + t^2 = 0$.
Cette tangente passe par $A(a, b)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
Il s'agit d'une équation dont le discriminant est $\Delta' = b^2 - 2a$.
Cette équation possède au moins une solution réelle t si et seulement si $b^2 \geq 2a$.
Conclusion : A appartient à Γ_A si et seulement si $b^2 \geq 2a$, c'est-à-dire si seulement si A appartient à la parabole $\mathcal{P}$ ($b^2 = 2a$) ou lui est strictement extérieur ($b^2 > 2a$.) [Q]

(b) Soit B un point de Γ_A. On suppose que B est distinct du point A.
On suppose également qu'il existe t_1, t_2 tels que $B = H(t_1) = H(t_2)$.
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à la fois à $\mathcal{D}(t_1)$ et à $\mathcal{D}(t_2)$.
Ces deux droites (passant par B et orthogonales à $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$) sont donc confondues.
Or $\mathcal{D}(t_1)$ est dirigée par $(t_1, 1)$, et $D(t_2)$ par $(t_2, 1)$. Il en découle $t_1 = t_2$.
Conclusion : le seul point double *possible* sur Γ_A est le point A. [Q]

(c) Comme on l'a vu en (a), on a $A = H(t)$ si et seulement si $t^2 - 2bt + 2a = 0$.
Le point A est un point double $\Leftrightarrow$ cette équation possède deux solutions distinctes.
Cela équivaut à dire que le discriminant $\delta' = b^2 - 2a$ est strictement positif.
Donc A est point double de $\Gamma_A \Leftrightarrow b^2 > 2a \Leftrightarrow A$ est strictement extérieur à $\mathcal{P}$. [Q]

3. (a) Notons t_1 et t_2 les deux réels distincts tels que $A = H(t_1) = H(t_2)$.
On sait que pour $t \notin \{t_1, t_2\}$, on a $H(t) \neq A$ (car par A ne passent que deux tangentes à $\mathcal{P}$.)
On sait que $H(t)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}(t)$ (tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t)$.)
Le vecteur $\overrightarrow{AH(t)}$ est donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M'(t)} = (1, t)$.
Ainsi le vecteur $(-t, 1)$ dirige la corde $AH(t)$, au voisinage de $t = t_1$ ou $t = t_2$.
Quand $t \to t_1$ (par exemple), le vecteur $(-t_1, 1)$ dirige donc la tangente à Γ_A en $A = H(t_1)$.

Cette tangente est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_1)$ (dirigée par $(1, t_1)$) c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t_1)$ (et qui passe par A.)
De même, la tangente à Γ_A en $A = H(t_2)$ est dirigée par $(-t_2, 1)$ et elle est orthogonale à la droite $\mathcal{D}(t_2)$ (dirigée par $(1, t_2)$) c'est-à-dire la tangente à $\mathcal{P}$ en $M(t_2)$ (et qui passe par A.)
Voici une illustration de la situtation : les deux tangentes au point double A sont respectivement orthogonales au deux tangentes menées de A à la parabole $\mathcal{P}$.



Remarque : on peut vérifier $\frac{Y(t)-b}{X(t)-a} = -t$ à partir des expressions de $X(t)$, $Y(t)$.
C'est cependent inélégant (et n'utilise pas la propriété géométrique définissant de Γ_A.) [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

(b) On sait que $A = H(t) \Leftrightarrow A \in \mathcal{D}(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + 2a = 0$.

Par hypothèse $A \in P$, donc $b^2 = 2a$.

$A = H(t) \Leftrightarrow t^2 - 2bt + b^2 = 0 \Leftrightarrow (t-b)^2 = 0 \Leftrightarrow t = b$.

$A(a, b)$, s'il est sur $\mathcal{P}$, est donc le point $H(b)$ de Γ_A.

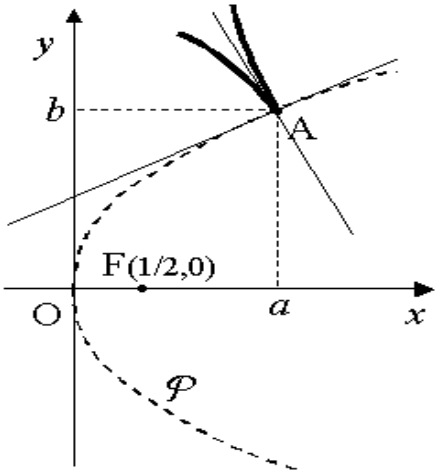
Pour tout $t \neq b$, $\overrightarrow{AH(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{M'(t)} = (1, t)$.

$\overrightarrow{AH(t)}$ est donc colinéaire à $(-t, 1)$.

Ainsi $(-b, 1)$ dirige la tangente à Γ_A en $A = H(b)$.

Au point $A = M(b)$ de $\mathcal{P}$, la tangente est dirigée par $(b, 1)$ et la normale par $(1, -b)$. Ainsi la tangente au point $A = H(b)$ de Γ_A est la normale à $\mathcal{P}$ en $A = M(b)$.

Sur l'illustration, on voit que la courbe Γ_A, du fait qu'elle reste extérieure à $\mathcal{P}$, présente un rebroussement en A.



[Q]

4. (a) Le point $H(s)$ appartient à la tangente $\mathcal{D}(s)$ à $\mathcal{P}$ en $M(s)$.

Cette droite passe par $M(s)$ et est dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{T}(s)$.

Il existe donc un réel $\lambda(s)$ tel que $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$.

Mais le vecteur $\overrightarrow{AH(s)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$.

Il en découle :

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{AH(s)} \mid \overrightarrow{T}(s)) = (\overrightarrow{AM(s)} + \overrightarrow{M(s)H(s)} \mid \overrightarrow{T}(s)) \\ &= (\overrightarrow{AM(s)} \mid \overrightarrow{T}(s)) + (\lambda(s)\overrightarrow{T}(s) \mid \overrightarrow{T}(s)) = (\overrightarrow{AM(s)} \mid \overrightarrow{T}(s)) + \lambda(s) \end{aligned}$$

Pour tout s on a donc : $H(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{T}(s)$ avec $\lambda(s) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))$. [Q]

(b) Avec les notations précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M(s)A}}{\mathrm{d}s} \,\middle|\, \overrightarrow{T}(s)\right) + \left(\overrightarrow{M(s)A} \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}(s)}{\mathrm{d}s}\right) \\ &= (-\overrightarrow{T}(s) \mid \overrightarrow{T}(s)) + \left(\overrightarrow{M(s)A} \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{N}(s)}{R(s)}\right) = -1 + \frac{1}{R(s)}(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s)). \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H'(s)} &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} + \lambda'(s)\overrightarrow{T}(s) + \lambda(s)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} \\ &= \overrightarrow{T}(s) + \left(-1 + \frac{1}{R(s)}(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\right)\overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\frac{\overrightarrow{N}}{R(s)} \\ &= \frac{1}{R(s)}\left[(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s))\overrightarrow{T}(s) + (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s))\overrightarrow{N}(s)\right] \end{aligned}$$

[Q]

(c) Supposons que $H(s)$ soit un point stationnaire de la courbe Γ_A, c'est-à-dire $\overrightarrow{H'(s)} = \overrightarrow{0}$.

Le résultat précédent donne alors $(\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{N}(s)) = (\overrightarrow{M(s)A} \mid \overrightarrow{T}(s)) = 0$.

Comme $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est une base de $\mathbb{R}^2$, cela équivaut à $\overrightarrow{M(s)A} = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $M(s) = A$.

Cela est évidemment exclu si A n'est pas un point de la parabole $\mathcal{P}$.

Conclusion : si A n'appartient pas à $\mathcal{P}$, la courbe Γ_A n'a pas de point stationnaire. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.