

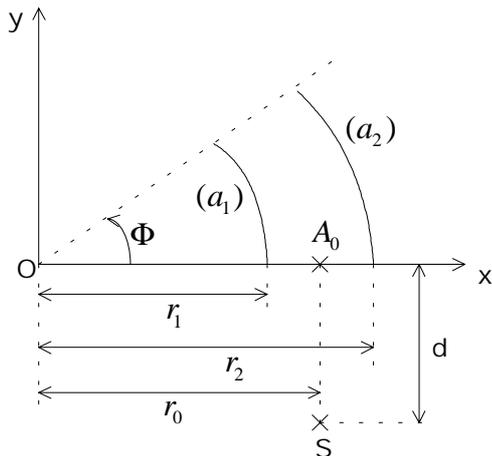
# MECANIQUE DU POINT MATERIEL

## EXERCICE D' ORAL

### -EXERCICE 13.6-

• **ENONCE :**

« Focalisation de particules par une lentille électrostatique »



Des particules non-relativistes de charge  $q$  sont émises par une source (S) : l'enceinte étant supposée à l'équilibre thermique, toutes les particules ont la même énergie cinétique. Les trajectoires étudiées sont situées dans le plan  $xOy$  ci-contre.

Les particules sont classées en 4 types:

**type  $P_0$**  : masse  $m_0$ , vitesse initiale de norme  $v_0$ , dirigée suivant  $Oy$ .

**type  $P_{\alpha}$**  : masse  $m_0$ , vitesse initiale de norme  $v_0$ , faisant un angle  $\alpha$  très petit avec  $Oy$ .

**type  $P_1$**  : masse  $m_1$ , vitesse initiale de norme  $v_1$ , dirigée suivant  $Oy$ .

**type  $P_{\alpha}$**  : masse  $m_1$ , vitesse initiale de norme  $v_1$ , faisant un angle  $\alpha$  très petit avec  $Oy$ .

• Par analogie avec l'optique géométrique, on va réaliser un dispositif permettant de faire converger toutes ces particules en un point ( $S'$ ), conjugué de (S) par ce dispositif, appelé « lentille électrostatique » : ceci n'est possible que pour des particules ayant des vitesses initiales peu inclinées par rapport à l'axe  $Oy$ , condition équivalente à l'Approximation de Gauss.

• Le système est constitué d'un secteur de condensateur cylindrique d'angle d'ouverture  $\Phi$  ; l'armature interne ( $a_1$ ), de rayon  $r_1$ , est au potentiel nul, tandis que l'armature externe ( $a_2$ ), de rayon  $r_2$ , est au potentiel  $U > 0$ . La hauteur  $h$  (selon l'axe  $Oz$ ) du condensateur est très supérieure à  $r_2$  ; par ailleurs, on pose :  $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$  et  $\Delta r = r_2 - r_1$ .

1) En négligeant les effets de bord, déterminer la topologie du champ électrique  $\vec{E}$  entre les armatures.

2) En notant  $E_0$  la valeur algébrique du champ électrique à la distance  $r_0$  du point O, exprimer la valeur algébrique du champ en un point M situé entre les armatures à la distance  $r$  du point O, ceci en fonction de  $r, r_0$  et  $E_0$ .

Exprimer ce champ en fonction de  $U, r, r_1$  et  $r_2$ .

3) Donner l'expression de  $U$  pour qu'une particule de type ( $P_0$ ) suive dans le condensateur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon  $r_0$  (dans la suite du problème,  $U$  **conservera cette expression**).

Que devient cette expression pour  $\Delta r \ll r_0$  ?

4) Quelle est la trajectoire d'une particule de type ( $P_1$ ) ?

## MECANIQUE DU POINT MATERIEL

### EXERCICE D' ORAL

• On veut étudier la trajectoire d'une particule de type  $(P_0)$ , ou  $(P_1)$  entre les armatures ; cette particule pénètre dans le condensateur au point  $(A_0)$ .

La position de la particule est repérée en coordonnées polaires d'origine O et d'axe polaire Ox ; l'origine des temps est prise à l'instant où la particule est en  $(A_0)$ .

5) Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de la particule dans le condensateur.

6) On pose :  $r(t) = r_0[1 + \varepsilon(t)]$ , avec  $|\varepsilon(t)| \ll 1$  ; à partir d'un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre en  $\alpha$  et  $\varepsilon$  (considérés comme des infiniment petits du même ordre), écrire l'équation différentielle régissant  $\varepsilon(t)$ .

En déduire l'expression de  $\varepsilon(t)$  (on pourra constater que  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont bien du même ordre).

7) En déduire l'expression de l'angle polaire  $\theta(t)$ , que l'on mettra sous la forme :

$$\theta(t) = at + \alpha[bt + c(1 - \cos \omega t)]$$

Quel est l'intérêt de cette mise en forme ?

• On étudie la convergence du faisceau de particules en sortie du condensateur ; les trajectoires en sortie sont des droites  $(D_\alpha)$  dépendant de  $\alpha$ ,  $(D_0)$  étant celle obtenue pour  $\alpha = 0$  :  $(D_0)$  et  $(D_\alpha)$  se coupent au point  $(S')$ , à une distance  $d'$  du plan de sortie du condensateur.

8) Compte tenu des approximations précédentes, calculer en fonction de  $\alpha, r_0, d, v_0$  et  $\Phi$  :

♦ l'instant  $t_1$  de sortie d'une particule entrée à l'instant 0 dans le condensateur (on justifiera le fait que l'on peut se contenter d'une expression de  $t_1$  à l'ordre 0).

♦ la distance de sortie  $r(t_1)$ .

♦ les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse de sortie.

9) En déduire l'expression de  $d'$  ; en conclure que le dispositif permet effectivement la convergence du faisceau pour un angle  $\Phi$  supérieur à une valeur que l'on précisera.

Dans quel cas obtient-on un faisceau parallèle en sortie ?

**Rq1** : pour les étudiants n'ayant pas encore abordé l'électrostatique, on donne les résultats des deux premières questions, soit :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r, \text{ avec } E(r) < 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{U}{\text{Ln}(r_2/r_1)} \times \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

**Rq2** : cet exercice est inspiré d'un problème de concours, et est bien sûr trop long pour être posé entièrement à l'oral.