Bijections de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$

1. Pour tout p de $\mathbb{N}$, on note $\begin{cases} D_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y=p\} \\ S_p = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y<p\} \end{cases}$
   (a) Vérifier que la famille $(D_p)_{p\geq 0}$ constitue une partition de $\mathbb{N}^2$. [S]
   (b) Calculer le cardinal d_p de l'ensemble D_p, et le cardinal s_p de l'ensemble S_p. [S]
2. Dans cette question, on forme une bijection f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout couple (x,y) d'entiers naturels, on pose $f(x,y) = x + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.
   (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{N}^2$, on a : $s_{x+y} \leq f(x,y) < s_{x+y+1}$. [S]
   (c) On se donne deux éléments (x,y) et (x',y') de $\mathbb{N}^2$, tels que $f(x,y) = f(x',y')$.
   Montrer que $x+y = x'+y'$, puis que $(x,y) = (x',y')$. Conclusion ? [S]
   (d) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique p de $\mathbb{N}$ tel que $s_p \leq n < s_{p+1}$. [S]
   (e) Avec les notations précédentes, calculer $f(n-s_p, s_{p+1}-n-1)$.
   En déduire que f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (f) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f ? [S]
   (g) Interpréter graphiquement la signification de l'application f. [S]
3. Dans cette question, on forme (à partir de f) une bijection g de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.
   Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$, on pose $g(x,y,z) = f(x, f(y,z))$.
   (a) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (b) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application g ? [S]
4. On va généraliser ce qui précède en formant f_k bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout $k \geq 1$.
   On définit donc les applications f_k de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
   – Tout d'abord, f_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   – Ensuite, si $k \geq 2$ et si on suppose que f_{k-1} est connue, on pose :
   Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k))$.
   (a) Vérifier les égalités $f_2 = f$ et $f_3 = g$. [S]
   (b) Pour tout $k \geq 1$, montrer que l'application f_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [S]
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $f_k(0, \ldots, 0, 1) = 1$.
   En déduire l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f_k, pour tout $k \geq 4$. [S]
5. La question (4) montre que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^k$.
   On rappelle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
   Dans cette question, on va montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Il suffit bien sûr de montrer qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, surjective.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est notée φ_n pour simplifier les notations.
   Conclure en considérant $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = \varphi_n(n) + 1$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

6. Cette question généralise les notations et résultats de la question (1).

   Pour tout (k,p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note : $\begin{cases} D_{k,p} = \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k = p\} \\ S_{k,p} = \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1+\cdots+x_k < p\} \end{cases}$

   Remarque : avec $k=2$, on retrouve bien $D_{2,p} = D_p$ et $S_{2,p} = S_p$.

   (a) On se donne n dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $q \geq n$, on a $\sum_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_{q+1}^{n+1}$ [S]

   (b) On note $s(k,p)$ le cardinal de l'ensemble $S_{k,p}$.
   Par une récurrence sur l'entier $k \geq 1$, montrer que $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^k$. [S]

   (c) En déduire le cardinal $d(k,p)$ de l'ensemble $D_{k,p}$. [S]

   (d) Soient $k \geq 1$ et $p \geq 0$. Montrer que $s(k,p+1) + s(k+1,p) = s(k+1,p+1)$. [S]

   (e) Montrer que pour $k \geq 1$ donné, la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante. [S]

7. Dans cette question, on généralise la définition des applications f, g de manière à former à nouveau des bijections g_k de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$, pour tout entier $k \geq 1$.

   La méthode de construction des g_k diffère cependant de celle vue à la question (4).
   On utilise les notations et les résultats de la question (6).
   La démonstration de la bijectivité des g_k généralise celle vue dans la question (2).

   Pour tout $k \geq 1$ et tout $(x_1,\dots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on pose :
   $g_k(x_1,\dots,x_k) = s(1,x_1) + s(2,x_1+x_2) + \cdots + s(k,x_1+\cdots+x_k) = \sum_{j=1}^{k} s(j, x_1+\cdots+x_j)$

   On observera qu'avec cette définition, et pour tout $k \geq 1$, on a :

   $$(E) \qquad g_{k+1}(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}) = g_k(x_1,\dots,x_k) + s(k+1, x_1+\cdots+x_{k+1})$$

   (a) Vérifier les égalités $g_1 = f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $g_2 = f_2 = f$.
   Expliciter l'application g_3. A-t-on $g_3 = f_3$ (c'est-à-dire $g_3 = g$) ? [S]

   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $(x_1,\dots,x_k)$ de $\mathbb{N}^k$, on a l'encadrement :
   $$s(k, x_1+\ldots+x_k) \leq g_k(x_1,\dots,x_k) < s(k, x_1+\ldots+x_k+1).$$
   Indication : raisonner par récurrence sur k, et utiliser les questions (6d) et (6e). [S]

   (c) On se donne $(x_1,\dots,x_k)$ et $(x'_1,\dots,x'_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.
   On suppose en outre que $g_k(x_1,\dots,x_k) = g_k(x'_1,\dots,x'_k)$.
   Montrer que $x_1+\cdots+x_k = x'_1+\cdots+x'_k$. [S]

   (d) Déduire de ce qui précède que les applications $(g_k)_{k\geq 1}$ sont injectives. [S]

   (e) On se donne deux entiers $k \geq 1$ et $p \geq 0$, et $(x_1,\dots,x_k)$ dans $\mathbb{N}^k$.
   En utilisant les questions (6d) et (7b), montrer l'équivalence :
   $$g_k(x_1,\dots,x_k) < s(k,p) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_k) \in S_{k,p}.$$
   En déduire que l'application g_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Corrigé du Problème

1. (a) Chaque D_p est non vide puisqu'il contient par exemple $(p,0)$.
Si $p \neq p'$, et si $(x,y) \in D_p$ alors $x+y = p \neq p'$ donc $(x,y) \notin D_{p'}$. Ainsi $D_p \cap D_{p'} = \emptyset$.
Pour tout (x,y) de $\mathbb{N}^2$, on a $(x,y) \in D_{x+y}$. Ainsi $\bigcup_{p\geq 0} D_p = \mathbb{N}^2$.

Conclusion : les D_p sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion donne $\mathbb{N}^2$. Ils forment donc une partition de $\mathbb{N}^2$.

Remarque : La relation définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \Leftrightarrow x+y = x'+y'$ est une relation d'équivalence. Les D_p consituent les classes d'équivalence de $\mathbb{N}^2$ pour cette relation. Il est donc normal qu'ils forment une partition de $\mathbb{N}^2$. [Q]

(b) On a $D_p = \{(j, p-j), j = 0\,..\,p\}$, donc $d_p = p+1$.

De plus $S_p = \bigcup_{j<p} D_j$ pour tout $p \geq 1$, et c'est une union disjointe.

On en déduit que : $s_p = \sum_{j=0}^{p-1} d_j = \sum_{j=1}^{p} j = \frac{p(p+1)}{2}$ (vrai si $p = 0$ car $S_0 = \emptyset$.) [Q]

2. (a) Pour tous x, y de $\mathbb{N}$, l'entier $(x+y)(x+y+1)$ est pair, donc $f(x,y)$ est dans $\mathbb{N}$. [Q]

(b) On a $f(x,y) = x + s_{x+y}$ et $s_{x+y} \leq x + s_{x+y} < x+y+1+s_{x+y}$.
On constate d'autre part que $x+y+1+s_{x+y} = s_{x+y+1}$.
On a donc obtenu $s_{x+y} \leq f(x,y) < s_{x+y+1}$, pour tous x, y dans $\mathbb{N}$. [Q]

(c) En utilisant ce qui précède, on trouve $s_{x+y} \leq f(x,y) = f(x',y') < s_{x'+y'+1}$.

La suite $(s_p)_{p\geq 0}$ est strictement croissante, donc $x+y < x'+y'+1$, càd : $x+y \leq x'+y'$.

Par symétrie du problème, on trouve $x'+y' \leq x+y$, donc $x+y = x'+y'$.

Posons $p = x+y = x'+y'$. On a $f(x,y) = x + \frac{p(p+1)}{2}$ et $f(x',y') = x' + \frac{p(p+1)}{2}$.
Puisque $f(x,y) = f(x',y')$, il vient $x = x'$, puis $y = p-x = p-x' = y'$.
Ainsi $f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y')$: l'application f est injective. [Q]

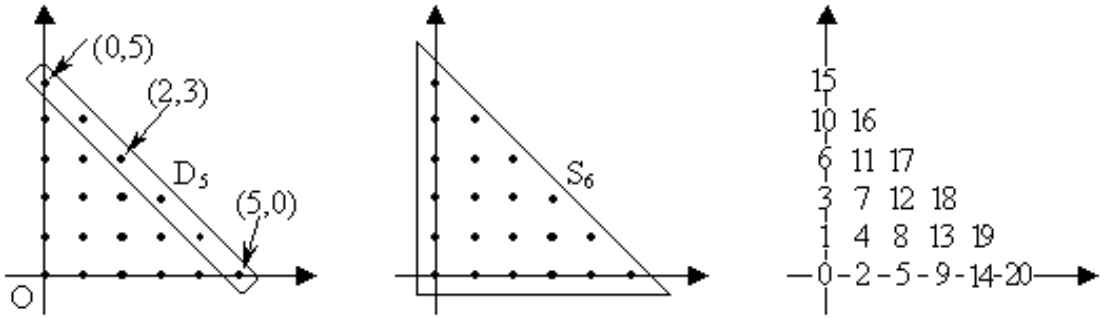
(d) Fixons n dans $\mathbb{N}$, et soit A l'ensemble des entiers naturels p tels que $s_p \leq n$.
Puisque $s_0 = 0 \leq n$, l'ensemble A est non vide (il contient 0.)
Pour tout p de $\mathbb{N}$, on a $d_{p-1} = p \leq s_p$. Si p est dans A, on a donc $p \leq s_p \leq n$.
Puisque A est non vide et majoré (par n) dans $\mathbb{N}$, il a un plus grand élément p.
Avec cette définition, on a : $p \in A$ et $(p+1) \notin A$, donc $s_p \leq n < s_{p+1}$.
Pour tout autre entier p', on a $s_{p'+1} \leq s_p$ (si $p' < p$) et $s_{p+1} \leq s_{p'}$ (si $p < p'$).
Cela prouve l'unicité de l'entier p vérifiant $s_p \leq n < s_{p+1}$. [Q]

(e) Avec les notations précédentes, posons $x = n - s_p$ et $y = s_{p+1} - n - 1$.
On remarque que $x+y = s_{p+1} - s_p - 1 = p$, donc $f(x,y) = x + s_p = n$.
Ainsi l'entier n (quelconque dans $\mathbb{N}$) possède un antécédent par f.
Il en découle que f est surjective, donc bijective (de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.) [Q]

(f) Empiriquement, $s_{44} = 22 \cdot 45 = 990$ et $s_{45} = s_{40} + 45 = 1035$. Ainsi $s_{44} \leq 1000 < s_{45}$.
Il en découle que $f(x,y) = 1000$, avec : $x = 1000 - s_{44} = 10$ et $y = s_{45} - 1001 = 34$.
L'antécédent de 1000 par f est donc $(10, 34)$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

(g) On a représenté ci-dessous les ensembles D_5 et $S_6 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$.
On a ensuite remplacé chacun des points de S_6 par son image par f.
On voit que le rôle de f consiste à numéroter les points de $\mathbb{N}^2$, on procédant par « diagonales» successives. Sur chaque diagonale D_p (constituée des points (x, y) tels que $x + y = p$) on numérote suivant les valeurs croissantes de l'abscisse x.



[Q]

3. (a) Tout d'abord l'application g est bien définie sur $\mathbb{N}^3$ est elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Soit n un entier naturel et (x, y, z) un élément de $\mathbb{N}^3$.
f étant bijective, il existe un unique (a, b) de $\mathbb{N}^2$ tel que $f(a, b) = n$.
On en déduit alors les équivalences : $f(x, y, z) = n \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = n \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ f(y, z) = b \end{cases}$
De même il existe un unique (c, d) de $\mathbb{N}^2$ tel que $f(c, d) = b$.
Donc $g(x, y, z) = n \Leftrightarrow (x = a, y = b, z = c)$: n a un antécédent unique par g.
L'application g est donc une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$. [Q]

(b) On sait que $(10, 34)$ est l'unique antécédent de 1000 par f.
On en déduit $g(x, y, z) = 1000 \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = 1000 \Leftrightarrow (x = 10$ et $f(y, z) = 34.)$
On constate que $f(6, 1) = 34$ par essais successifs, ou comme dans la question $(2f)$.
On en déduit que l'unique antécédent de 1000 par g est $(10, 6, 1)$. [Q]

4. (a) On trouve immédiatement :
– $\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2,\ f_2(x_1, x_2) = f(x_1, f_1(x_2)) = f(x_1, x_2)$. Donc $f_2 = f$.
– $\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3,\ f_3(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, f_2(x_2, x_3))) = f(x_1, f(x_2, x_3))$.
Ainsi $f_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$ et f_3 n'est autre que l'application g.
[Q]

(b) Par construction, chaque f_k est bien une application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$.
Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ « $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est bijective ».
Cette propriété est évidente si $k = 1$ (car $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$), et vraie si $k = 2$ car $f_2 = f$.
On se donne donc un entier $k \geq 2$ et on suppose que $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que f_k est bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. On pose l'équation (E) : $f_k(x_1, \ldots, x_k) = n$ (avec $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathbb{N}$.)
Par définition $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, y_1)$ avec $y_1 = f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k)$.
(E) devient $f(x_1, y_1) = n$, qui détermine x_1, y_1 de façon unique car f est bijective.
Connaissant cet entier y_1, il reste l'égalité $f_{k-1}(x_2, \ldots, x_k) = y_1$, qui détermine $x_2, \ldots, x_k$ de façon unique car f_{k-1} est bijective (hypothèse de récurrence.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Ainsi tout n de $\mathbb{N}$ possède un antécédent unique par l'application f_k.
On a donc démontré la propriété au rang k, ce qui achève la récurrence.
Conclusion : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'application f_k est bijective de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [Q]

(c) Par récurrence sur $k \geq 2$, montrons la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $f_k(0,\dots,0,1) = 1$ »
La propriété est vraie si $k = 2$ car $f_2(0,1) = f(0,1) = 1$.
On se donne $k \geq 2$ tel que $f_k(0,\dots,0,1) = 1$.
Alors $f_{k+1}(0,\dots,0,1) = f(0, f_{k-1}(0,\dots,0,1)) = f(0,1) = 1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.
On a donc $f_k(0,\dots,0,1) = 1$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
On en déduit successivement, pour tout entier $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} f_k(10,6,0,\dots,0,1) &= f(10, f(6, f_{k-2}(0,\dots,0,1))) \\ &= f(10, f(6,1)) = f(10,34) = 1000 \end{aligned}$$

Ainsi l'antécédent de 1000 par f_k est $(10,6,0,\dots,0,1)$. [Q]

5. h est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Puisque φ est surjective, il doit exister un entier p tel que $h = \varphi(p) = \varphi_p$.
Cela signifie que pour tout entier n, on a $h(n) = \varphi_p(n)$ donc $\varphi_n(n) + 1 = \varphi_p(n)$.
On voit bien que pour $n = p$ cette égalité est absurde.
On en conclut qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
En particulier il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}$. [Q]

6. (a) On procède par récurrence sur q, le pas initial étant $q = n$.
La propriété est évidente si $q = n$ car $\sum_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_n^n = 1$ qui est égal à C_{q+1}^{n+1}.
On se donne un entier $q \geq n$, et on suppose que la propriété est vraie au rang q.
On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{q+1} \mathrm{C}_m^n &= \sum_{m=n}^{q} \mathrm{C}_m^n + \mathrm{C}_{q+1}^n = \mathrm{C}_{q+1}^{n+1} + \mathrm{C}_{q+1}^n \ \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathrm{C}_{q+2}^{n+1} \ \text{(propriété caractéristique du triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $q+1$ et achève la récurrence. [Q]

(b) L'égalité $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^k$ est vraie si $k = 1$ car elle se réduit à $s(1,p) = \mathrm{C}_p^1 = p$.
On a en effet $S_{1,p} = \{x_1 \in \mathbb{N}, x_1 < p\} = \{0,1,\dots,p-1\}$ donc $s(1,p) = p$.
On se donne maintenant un entier $k \geq 1$.
On suppose que la propriété est vraie au rang k (hypothèse de récurrence.)
Se donner un élément quelconque $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ de $S_{k+1,p}$ c'est :
– Se donner un entier x_{k+1} quelconque dans l'ensemble $\{0,1,\dots,p-1\}$.
– Puis se donner entiers $x_1,\dots,x_k$ tels que $x_1 + \dots + x_k < p - x_{k+1}$.
Cela revient à se donner $(x_1,\dots,x_k)$ dans $S_{k,q}$ avec $q = p - x_{k+1}$.
Quand x_{k+1} varie de 0 à $p-1$, alors $q = p - x_{k+1}$ varie de 1 à p.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Ce dénombrement permet d'écrire l'égalité $s(k+1,p) = \sum_{q=1}^{p} s(k,q)$.

On sait que $s(k,q) = \mathrm{C}_{k+q-1}^{k}$ (hypothèse de récurrence) pour tout entier q.

En utilisant (a), on en déduit $s(k+1,p) = \sum_{q=1}^{p} \mathrm{C}_{k+q-1}^{k} = \sum_{m=k}^{k+p-1} \mathrm{C}_{m}^{k} = \mathrm{C}_{k+p}^{k+1}$.

Ce résultat prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

On a donc prouvé l'égalité $s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p-1}^{k}$ pour tout $k \geq 1$ et tout $p \geq 0$.

Remarque : on retrouve le résultat de (1b), $s_p = s(2,p) = \mathrm{C}_{p+1}^{2} = \frac{p(p+1)}{2}$. [Q]

(c) L'ensemble $S_{k,p+1}$ est l'union disjointe de $S_{k,p}$ et de $D_{k,p}$.
Ainsi $s(k,p+1) = s(k,p) + d(k,p)$.
On en déduit $d(k,p) = s(k,p+1) - s(k,p) = \mathrm{C}_{k+p}^{k} - \mathrm{C}_{k+p-1}^{k} = \mathrm{C}_{k+p-1}^{k-1}$.
On retrouve par exemple $d_p = d(2,p) = \mathrm{C}_{p+1}^{1} = p+1$. [Q]

(d) En utilisant la propriété caractéristique du triangle de Pascal, on trouve :
$s(k,p+1) + s(k+1,p) = \mathrm{C}_{k+p}^{k} + \mathrm{C}_{k+p}^{k+1} = \mathrm{C}_{k+p+1}^{k+1} = s(k+1,p+1)$. [Q]

(e) Si $p < p'$, on a $s(k,p) < s(k,p')$ car $S(k,p)$ est strictement inclus dans $S(k,p')$.
En effet toute solution de $x_1 + \ldots + x_k < p$ est aussi solution de $x_1 + \ldots + x_k < p'$.
D'autre part, $(p, 0 \ldots, 0)$ est dans $S_{k,p'}$ mais pas dans $S_{k,p}$. [Q]

7. (a) – On trouve immédiatement $g_1(x_1) = s(1,x_1) = \mathrm{C}_{x_1}^{1} = x_1$.
Ainsi g_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
– On trouve $g_2(x_1,x_2) = x_1 + s(2, x_1+x_2) = x_1 + \mathrm{C}_{x_1+x_2+1}^{2} = x_1 + \dfrac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2}$
On constate que g_2 n'est autre que l'application f (ou encore f_2).
– On trouve enfin :

$$g_3(x_1,x_2,x_3) = g_2(x_1,x_2) + \mathrm{C}_{x_1+x_2+x_3+2}^{3}$$
$$= x_1 + \frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2!} + \frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3+1)(x_1+x_2+x_3+2)}{3!}$$

On sait que $g(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,y) = x_1 + \dfrac{(x_1+y)(x_1+y+1)}{2}$, avec $y = f(x_2,x_3)$.
Le terme dominant en x_1 dans $g(x_1,x_2,x_3)$ est $\frac{x_1^2}{4}$ (y ne dépend pas de x_1.)
En revanche le terme dominant en x_1 dans $g_3(x_1,x_2,x_3)$ est $\frac{x_1^3}{6}$.
Cette différence suffit à prouver que g_3 est distincte de g (c'est-à-dire de f_3.)
[Q]

(b) L'inégalité $s(k, x_1 + \ldots + x_k) \leq g_k(x_1, \ldots, x_k)$ est évidente et résulte de (E).
On va montrer $g_k(x_1, \ldots, x_k) < s(k, x_1 + \ldots + x_k + 1)$ par récurrence sur k.
Cette inégalité est évidente si $k = 1$ car $g_1(x_1) = x_1$ et $s(1, x_1+1) = x_1 + 1$.
On suppose qu'elle est vraie pour un rang $k \geq 1$ donné.
On a alors successivement (les justifications sont données après) :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1}) &= g_k(x_1,\dots,x_k) + s(k+1, x_1+\cdots+x_{k+1}) && (i)\\ &< s(k, x_1+\cdots+x_k+1) + s(k+1, x_1+\cdots+x_{k+1}) && (ii)\\ &\leq s(k, x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+1) + s(k+1, x_1+\cdots+x_{k+1}) && (iii)\\ &= s(k+1, x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+1) && (iv) \end{aligned}$$

Finalement $g_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1}) < s(k+1, x_1+\cdots+x_k+x_{k+1}+1)$.
Voici les justifications des étapes précédentes :

(i) C'est la remarque notée (E) dans l'énoncé.

(ii) C'est l'hypothèse de récurrence.

(iii) On utilise le fait que $p \leq p' \Rightarrow s(k,p) \leq s(k,p')$ (question (6e)).

(iv) On utilise ici la question (6d), avec $p = x_1 + \cdots + x_{k+1}$.

On a ainsi démontré la propriété au rang $k+1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

(c) On suppose donc que $g_k(x_1,\dots,x_k) = g_k(x'_1,\dots,x'_k)$.
La question précédente donne alors :

$$s(k, x_1+\ldots+x_k) \leq g_k(x_1,\dots,x_k) = g_k(x'_1,\dots,x'_k) < s(k, x'_1+\ldots+x'_k+1)$$

On obtient donc : $s(k, x_1+\ldots+x_k) < s(k, x'_1+\ldots+x'_k+1)$.
Mais on se souvient que la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante.
Il en découle l'inégalité $x_1+\ldots+x_k \leq x'_1+\ldots+x'_k$.
Par symétrie du problème, on a aussi l'inégalité inverse.
On a donc prouvé l'égalité $x_1+\ldots+x_k = x'_1+\ldots+x'_k$. [Q]

(d) Montrons par récurrence sur k que les applications g_k sont injectives.
La propriété est vraie si $k=1$ car g_1 est l'application identité de $\mathbb{N}$.
Soit $k \geq 2$ tel que g_{k-1} soit injective. Montrons que g_k est injective.
Pour cela, on se donne $(x_1,\dots,x_k)$ et $(x'_1,\dots,x'_k)$ tels que $g_k(x_1,\dots,x_k) = g_k(x'_1,\dots,x'_k)$.
La question précédente donne l'égalité (E') : $x_1+\ldots+x_k = x'_1+\ldots+x'_k$.
Mais on sait (en réécrivant l'égalité (E) indiquée dans l'énoncé) que :

$$\begin{cases} g_k(x_1,\dots,x_k) = g_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) + s(k, x_1+\cdots+x_k) \\ g_k(x'_1,\dots,x'_k) = g_{k-1}(x'_1,\dots,x'_{k-1}) + s(k, x'_1+\cdots+x'_k) \end{cases}$$

Par différence membre à membre, on obtient $g_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1}) = g_{k-1}(x'_1,\dots,x'_{k-1})$.
L'hypothèse de récurrence (g_{k-1} injective) donne alors $(x_1,\dots,x_{k-1}) = (x'_1,\dots,x'_{k-1})$.
L'égalité (E') fournit enfin $x_k = x'_k$.
Conclusion : on a prouvé que g_k est injective, ce qui achève la récurrence. [Q]

(e) On sait que : $s(k, x_1+\ldots+x_k) \leq g_k(x_1,\dots,x_k) < s(k, x_1+\ldots+x_k+1)$.
On sait aussi que la suite $p \mapsto s(k,p)$ est strictement croissante.
On en déduit que l'inégalité $g_k(x_1,\dots,x_k) < s(k,p)$ équivaut à $x_1+\ldots+x_k < p$.
Autrement dit $g_k(x_1,\dots,x_k) < s(k,p) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_k) \in S_{k,p}$.
Ce résultat montre que g_k envoie l'ensemble $S_{k,p}$ (dont le cardinal est $s(k,p)$) sur l'intervalle d'entiers $I_{k,p} = [0,..,s(k,p)[$ (dont le cardinal est également $s(k,p)$.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

La restriction de g_k à $S_{k,p}$ est donc injective (car g_k est injective) de $S_{k,p}$ dans $I_{k,p}$.
Puisque ces deux ensembles ont même cardinal, cette restriction est une bijection.

Ainsi tout élément de $I_{k,p}$ possède un antécédent (et un seul) dans $S_{k,p}$.
Enfin, tout entier n figure dans un $I_{k,p}$, pour p assez grand, car $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{k,p} = +\infty$.

Tout n de $\mathbb{N}$ possède donc un antécédent (et un seul par injectivité) dans $\mathbb{N}^k$.

Conclusion : l'application g_k est une bijection de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$. [Q]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.