

Bijections de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N}

1. Pour tout p de \mathbb{N} , on note
$$\begin{cases} D_p = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x + y = p\} \\ S_p = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x + y < p\} \end{cases}$$
 - (a) Vérifier que la famille $(D_p)_{p \geq 0}$ constitue une partition de \mathbb{N}^2 . [S]
 - (b) Calculer le cardinal d_p de l'ensemble D_p , et le cardinal s_p de l'ensemble S_p . [S]
2. Dans cette question, on forme une bijection f de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .
 Pour tout couple (x, y) d'entiers naturels, on pose $f(x, y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.
 - (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une application de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} . [S]
 - (b) Montrer que pour tout (x, y) de \mathbb{N}^2 , on a : $s_{x+y} \leq f(x, y) < s_{x+y+1}$. [S]
 - (c) On se donne deux éléments (x, y) et (x', y') de \mathbb{N}^2 , tels que $f(x, y) = f(x', y')$.
 Montrer que $x + y = x' + y'$, puis que $(x, y) = (x', y')$. Conclusion ? [S]
 - (d) Soit n dans \mathbb{N} . Montrer qu'il existe un unique p de \mathbb{N} tel que $s_p \leq n < s_{p+1}$. [S]
 - (e) Avec les notations précédentes, calculer $f(n - s_p, s_{p+1} - n - 1)$.
 En déduire que f est bijective de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} . [S]
 - (f) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f ? [S]
 - (g) Interpréter graphiquement la signification de l'application f . [S]
3. Dans cette question, on forme (à partir de f) une bijection g de \mathbb{N}^3 sur \mathbb{N} .
 Pour tout (x, y, z) de \mathbb{N}^3 , on pose $g(x, y, z) = f(x, f(y, z))$.
 - (a) Montrer que g est une bijection de \mathbb{N}^3 sur \mathbb{N} . [S]
 - (b) Quel est l'antécédent de l'entier 1000 par l'application g ? [S]
4. On va généraliser ce qui précède en formant f_k bijective de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} , pour tout $k \geq 1$.
 On définit donc les applications f_k de \mathbb{N}^k dans \mathbb{N} de la façon suivante :
 - Tout d'abord, f_1 est l'application identité de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .
 - Ensuite, si $k \geq 2$ et si on suppose que f_{k-1} est connue, on pose :
 Pour tout (x_1, x_2, \dots, x_k) de \mathbb{N}^k , $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, f_{k-1}(x_2, \dots, x_k))$.
 - (a) Vérifier les égalités $f_2 = f$ et $f_3 = g$. [S]
 - (b) Pour tout $k \geq 1$, montrer que l'application f_k est une bijection de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} . [S]
 - (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $f_k(0, \dots, 0, 1) = 1$.
 En déduire l'antécédent de l'entier 1000 par l'application f_k , pour tout $k \geq 4$. [S]
5. La question (4) montre que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^k .
 On rappelle que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de \mathbb{N} dans lui-même.
 Dans cette question, on va montrer qu'il n'existe pas de bijection entre \mathbb{N} et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
 Il suffit bien sûr de montrer qu'il n'existe pas de surjection de \mathbb{N} sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
 Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, surjective.
 Pour tout n de \mathbb{N} , l'application $\varphi(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est notée φ_n pour simplifier les notations.
 Conclure en considérant $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, h(n) = \varphi_n(n) + 1$. [S]

6. Cette question généralise les notations et résultats de la question (1).

Pour tout (k, p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note :
$$\begin{cases} D_{k,p} = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1 + \dots + x_k = p\} \\ S_{k,p} = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, x_1 + \dots + x_k < p\} \end{cases}$$

Remarque : avec $k = 2$, on retrouve bien $D_{2,p} = D_p$ et $S_{2,p} = S_p$.

(a) On se donne n dans \mathbb{N} . Montrer que pour tout $q \geq n$, on a $\sum_{m=n}^q C_m^n = C_{q+1}^{n+1}$ [S]

(b) On note $s(k, p)$ le cardinal de l'ensemble $S_{k,p}$.

Par une récurrence sur l'entier $k \geq 1$, montrer que $s(k, p) = C_{k+p-1}^k$. [S]

(c) En déduire le cardinal $d(k, p)$ de l'ensemble $D_{k,p}$. [S]

(d) Soient $k \geq 1$ et $p \geq 0$. Montrer que $s(k, p+1) + s(k+1, p) = s(k+1, p+1)$. [S]

(e) Montrer que pour $k \geq 1$ donné, la suite $p \mapsto s(k, p)$ est strictement croissante. [S]

7. Dans cette question, on généralise la définition des applications f, g de manière à former à nouveau des bijections g_k de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} , pour tout entier $k \geq 1$.

La méthode de construction des g_k diffère cependant de celle vue à la question (4).

On utilise les notations et les résultats de la question (6).

La démonstration de la bijectivité des g_k généralise celle vue dans la question (2).

Pour tout $k \geq 1$ et tout (x_1, \dots, x_k) de \mathbb{N}^k , on pose :

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = s(1, x_1) + s(2, x_1 + x_2) + \dots + s(k, x_1 + \dots + x_k) = \sum_{j=1}^k s(j, x_1 + \dots + x_j)$$

On observera qu'avec cette définition, et pour tout $k \geq 1$, on a :

$$(E) \quad g_{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = g_k(x_1, \dots, x_k) + s(k+1, x_1 + \dots + x_{k+1})$$

(a) Vérifier les égalités $g_1 = f_1 = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ et $g_2 = f_2 = f$.

Expliciter l'application g_3 . A-t-on $g_3 = f_3$ (c'est-à-dire $g_3 = g$) ? [S]

(b) Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout (x_1, \dots, x_k) de \mathbb{N}^k , on a l'encadrement :

$$s(k, x_1 + \dots + x_k) \leq g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, x_1 + \dots + x_k + 1).$$

Indication : raisonner par récurrence sur k , et utiliser les questions (6d) et (6e). [S]

(c) On se donne (x_1, \dots, x_k) et (x'_1, \dots, x'_k) dans \mathbb{N}^k .

On suppose en outre que $g_k(x_1, \dots, x_k) = g_k(x'_1, \dots, x'_k)$.

Montrer que $x_1 + \dots + x_k = x'_1 + \dots + x'_k$. [S]

(d) Déduire de ce qui précède que les applications $(g_k)_{k \geq 1}$ sont injectives. [S]

(e) On se donne deux entiers $k \geq 1$ et $p \geq 0$, et (x_1, \dots, x_k) dans \mathbb{N}^k .

En utilisant les questions (6d) et (7b), montrer l'équivalence :

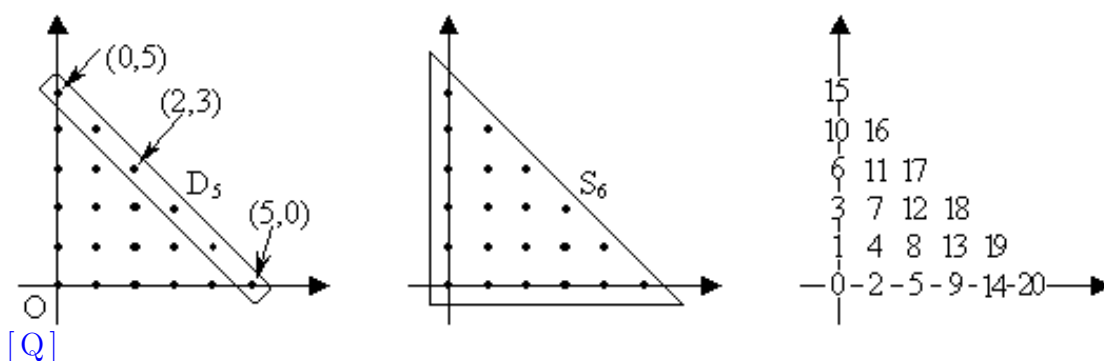
$$g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, p) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in S_{k,p}.$$

En déduire que l'application g_k est une bijection de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} . [S]

Corrigé du Problème

1. (a) Chaque D_p est non vide puisqu'il contient par exemple $(p, 0)$.
 Si $p \neq p'$, et si $(x, y) \in D_p$ alors $x + y = p \neq p'$ donc $(x, y) \notin D_{p'}$. Ainsi $D_p \cap D_{p'} = \emptyset$.
 Pour tout (x, y) de \mathbb{N}^2 , on a $(x, y) \in D_{x+y}$. Ainsi $\bigcup_{p \geq 0} D_p = \mathbb{N}^2$.
 Conclusion : les D_p sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion donne \mathbb{N}^2 .
 Ils forment donc une partition de \mathbb{N}^2 .
 Remarque : La relation définie sur \mathbb{N}^2 par $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$ est une relation d'équivalence. Les D_p constituent les classes d'équivalence de \mathbb{N}^2 pour cette relation. Il est donc normal qu'ils forment une partition de \mathbb{N}^2 . [Q]
- (b) On a $D_p = \{(j, p-j), j = 0 \dots p\}$, donc $d_p = p + 1$.
 De plus $S_p = \bigcup_{j < p} D_j$ pour tout $p \geq 1$, et c'est une union disjointe.
 On en déduit que : $s_p = \sum_{j=0}^{p-1} d_j = \sum_{j=1}^p j = \frac{p(p+1)}{2}$ (vrai si $p = 0$ car $S_0 = \emptyset$). [Q]
2. (a) Pour tous x, y de \mathbb{N} , l'entier $(x+y)(x+y+1)$ est pair, donc $f(x, y)$ est dans \mathbb{N} . [Q]
- (b) On a $f(x, y) = x + s_{x+y}$ et $s_{x+y} \leq x + s_{x+y} < x + y + 1 + s_{x+y}$.
 On constate d'autre part que $x + y + 1 + s_{x+y} = s_{x+y+1}$.
 On a donc obtenu $s_{x+y} \leq f(x, y) < s_{x+y+1}$, pour tous x, y dans \mathbb{N} . [Q]
- (c) En utilisant ce qui précède, on trouve $s_{x+y} \leq f(x, y) = f(x', y') < s_{x'+y'+1}$.
 La suite $(s_p)_{p \geq 0}$ est strictement croissante, donc $x+y < x'+y'+1$, càd : $x+y \leq x'+y'$.
 Par symétrie du problème, on trouve $x' + y' \leq x + y$, donc $x + y = x' + y'$.
 Posons $p = x + y = x' + y'$. On a $f(x, y) = x + \frac{p(p+1)}{2}$ et $f(x', y') = x' + \frac{p(p+1)}{2}$.
 Puisque $f(x, y) = f(x', y')$, il vient $x = x'$, puis $y = p - x = p - x' = y'$.
 Ainsi $f(x, y) = f(x', y') \Rightarrow (x, y) = (x', y')$: l'application f est injective. [Q]
- (d) Fixons n dans \mathbb{N} , et soit A l'ensemble des entiers naturels p tels que $s_p \leq n$.
 Puisque $s_0 = 0 \leq n$, l'ensemble A est non vide (il contient 0).
 Pour tout p de \mathbb{N} , on a $d_{p-1} = p \leq s_p$. Si p est dans A , on a donc $p \leq s_p \leq n$.
 Puisque A est non vide et majoré (par n) dans \mathbb{N} , il a un plus grand élément p .
 Avec cette définition, on a : $p \in A$ et $(p+1) \notin A$, donc $s_p \leq n < s_{p+1}$.
 Pour tout autre entier p' , on a $s_{p'+1} \leq s_p$ (si $p' < p$) et $s_{p+1} \leq s_{p'}$ (si $p < p'$).
 Cela prouve l'unicité de l'entier p vérifiant $s_p \leq n < s_{p+1}$. [Q]
- (e) Avec les notations précédentes, posons $x = n - s_p$ et $y = s_{p+1} - n - 1$.
 On remarque que $x + y = s_{p+1} - s_p - 1 = p$, donc $f(x, y) = x + s_p = n$.
 Ainsi l'entier n (quelconque dans \mathbb{N}) possède un antécédent par f .
 Il en découle que f est surjective, donc bijective (de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N}). [Q]
- (f) Empiriquement, $s_{44} = 22 \cdot 45 = 990$ et $s_{45} = s_{40} + 45 = 1035$. Ainsi $s_{44} \leq 1000 < s_{45}$.
 Il en découle que $f(x, y) = 1000$, avec : $x = 1000 - s_{44} = 10$ et $y = s_{45} - 1001 = 34$.
 L'antécédent de 1000 par f est donc $(10, 34)$. [Q]

- (g) On a représenté ci-dessous les ensembles D_5 et $S_6 = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5$.
 On a ensuite remplacé chacun des points de S_6 par son image par f .
 On voit que le rôle de f consiste à numéroter les points de \mathbb{N}^2 , on procédant par « diagonales » successives. Sur chaque diagonale D_p (constituée des points (x, y) tels que $x + y = p$) on numérote suivant les valeurs croissantes de l'abscisse x .



[Q]

3. (a) Tout d'abord l'application g est bien définie sur \mathbb{N}^3 est elle est à valeurs dans \mathbb{N} .
 Soit n un entier naturel et (x, y, z) un élément de \mathbb{N}^3 .
 f étant bijective, il existe un unique (a, b) de \mathbb{N}^2 tel que $f(a, b) = n$.
 On en déduit alors les équivalences : $f(x, y, z) = n \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = n \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ f(y, z) = b \end{cases}$
 De même il existe un unique (c, d) de \mathbb{N}^2 tel que $f(c, d) = b$.
 Donc $g(x, y, z) = n \Leftrightarrow (x = a, y = b, z = c) : n$ a un antécédent unique par g .
 L'application g est donc une bijection de \mathbb{N}^3 sur \mathbb{N} . [Q]
- (b) On sait que $(10, 34)$ est l'unique antécédent de 1000 par f .
 On en déduit $g(x, y, z) = 1000 \Leftrightarrow f(x, f(y, z)) = 1000 \Leftrightarrow (x = 10 \text{ et } f(y, z) = 34.)$
 On constate que $f(6, 1) = 34$ par essais successifs, ou comme dans la question (2f).
 On en déduit que l'unique antécédent de 1000 par g est $(10, 6, 1)$. [Q]
4. (a) On trouve immédiatement :
 - $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2, f_2(x_1, x_2) = f(x_1, f_1(x_2)) = f(x_1, x_2)$. Donc $f_2 = f$.
 - $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3, f_3(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, f_2(x_2, x_3)) = f(x_1, f(x_2, x_3))$.
 Ainsi $f_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$ et f_3 n'est autre que l'application g .
 [Q]
- (b) Par construction, chaque f_k est bien une application de \mathbb{N}^k dans \mathbb{N} .
 Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ « $f_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est bijective ». Cette propriété est évidente si $k = 1$ (car $f_1 = \text{Id}_{\mathbb{N}}$), et vraie si $k = 2$ car $f_2 = f$.
 On se donne donc un entier $k \geq 2$ et on suppose que $\mathcal{P}(k - 1)$ est vraie.
 Montrons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que f_k est bijective de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} .
 Soit n dans \mathbb{N} . On pose l'équation (E) : $f_k(x_1, \dots, x_k) = n$ (avec x_1, \dots, x_k dans \mathbb{N}).
 Par définition $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, y_1)$ avec $y_1 = f_{k-1}(x_2, \dots, x_k)$.
 (E) devient $f(x_1, y_1) = n$, qui détermine x_1, y_1 de façon unique car f est bijective.
 Connaissant cet entier y_1 , il reste l'égalité $f_{k-1}(x_2, \dots, x_k) = y_1$, qui détermine x_2, \dots, x_k de façon unique car f_{k-1} est bijective (hypothèse de récurrence.)

Ainsi tout n de \mathbb{N} possède un antécédent unique par l'application f_k .

On a donc démontré la propriété au rang k , ce qui achève la récurrence.

Conclusion : pour tout k de \mathbb{N}^* , l'application f_k est bijective de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} . [Q]

(c) Par récurrence sur $k \geq 2$, montrons la propriété $\mathcal{P}(k) : \ll f_k(0, \dots, 0, 1) = 1 \gg$

La propriété est vraie si $k = 2$ car $f_2(0, 1) = f(0, 1) = 1$.

On se donne $k \geq 2$ tel que $f_k(0, \dots, 0, 1) = 1$.

Alors $f_{k+1}(0, \dots, 0, 1) = f(0, f_{k-1}(0, \dots, 0, 1)) = f(0, 1) = 1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$.

On a donc $f_k(0, \dots, 0, 1) = 1$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

On en déduit successivement, pour tout entier $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} f_k(10, 6, 0, \dots, 0, 1) &= f(10, f(6, f_{k-2}(0, \dots, 0, 1))) \\ &= f(10, f(6, 1)) = f(10, 34) = 1000 \end{aligned}$$

Ainsi l'antécédent de 1000 par f_k est $(10, 6, 0, \dots, 0, 1)$. [Q]

5. h est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , donc un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Puisque φ est surjective, il doit exister un entier p tel que $h = \varphi(p) = \varphi_p$.

Cela signifie que pour tout entier n , on a $h(n) = \varphi_p(n)$ donc $\varphi_n(n) + 1 = \varphi_p(n)$.

On voit bien que pour $n = p$ cette égalité est absurde.

On en conclut qu'il n'existe pas de surjection de \mathbb{N} sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

En particulier il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et \mathbb{N} . [Q]

6. (a) On procède par récurrence sur q , le pas initial étant $q = n$.

La propriété est évidente si $q = n$ car $\sum_{m=n}^q C_m^n = C_n^n = 1$ qui est égal à C_{q+1}^{n+1} .

On se donne un entier $q \geq n$, et on suppose que la propriété est vraie au rang q .

On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{q+1} C_m^n &= \sum_{m=n}^q C_m^n + C_{q+1}^n = C_{q+1}^{n+1} + C_{q+1}^n \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= C_{q+2}^{n+1} \quad (\text{propriété caractéristique du triangle de Pascal}) \end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $q+1$ et achève la récurrence. [Q]

(b) L'égalité $s(k, p) = C_{k+p-1}^k$ est vraie si $k = 1$ car elle se réduit à $s(1, p) = C_p^1 = p$.

On a en effet $S_{1,p} = \{x_1 \in \mathbb{N}, x_1 < p\} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ donc $s(1, p) = p$.

On se donne maintenant un entier $k \geq 1$.

On suppose que la propriété est vraie au rang k (hypothèse de récurrence.)

Se donner un élément quelconque $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ de $S_{k+1,p}$ c'est :

- Se donner un entier x_{k+1} quelconque dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, p-1\}$.
- Puis se donner entiers x_1, \dots, x_k tels que $x_1 + \dots + x_k < p - x_{k+1}$.

Cela revient à se donner (x_1, \dots, x_k) dans $S_{k,q}$ avec $q = p - x_{k+1}$.

Quand x_{k+1} varie de 0 à $p-1$, alors $q = p - x_{k+1}$ varie de 1 à p .

Ce dénombrement permet d'écrire l'égalité $s(k+1, p) = \sum_{q=1}^p s(k, q)$.

On sait que $s(k, q) = C_{k+q-1}^k$ (hypothèse de récurrence) pour tout entier q .

En utilisant (a), on en déduit $s(k+1, p) = \sum_{q=1}^p C_{k+q-1}^k = \sum_{m=k}^{k+p-1} C_m^k = C_{k+p}^{k+1}$.

Ce résultat prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

On a donc prouvé l'égalité $s(k, p) = C_{k+p-1}^k$ pour tout $k \geq 1$ et tout $p \geq 0$.

Remarque : on retrouve le résultat de (1b), $s_p = s(2, p) = C_{p+1}^2 = \frac{p(p+1)}{2}$. [Q]

(c) L'ensemble $S_{k,p+1}$ est l'union disjointe de $S_{k,p}$ et de $D_{k,p}$.

Ainsi $s(k, p+1) = s(k, p) + d(k, p)$.

On en déduit $d(k, p) = s(k, p+1) - s(k, p) = C_{k+p}^k - C_{k+p-1}^k = C_{k+p-1}^{k-1}$.

On retrouve par exemple $d_p = d(2, p) = C_{p+1}^1 = p+1$. [Q]

(d) En utilisant la propriété caractéristique du triangle de Pascal, on trouve :

$s(k, p+1) + s(k+1, p) = C_{k+p}^k + C_{k+p}^{k+1} = C_{k+p+1}^{k+1} = s(k+1, p+1)$. [Q]

(e) Si $p < p'$, on a $s(k, p) < s(k, p')$ car $S(k, p)$ est strictement inclus dans $S(k, p')$.

En effet toute solution de $x_1 + \dots + x_k < p$ est aussi solution de $x_1 + \dots + x_k < p'$.

D'autre part, $(p, 0, \dots, 0)$ est dans $S_{k,p'}$ mais pas dans $S_{k,p}$. [Q]

7. (a) – On trouve immédiatement $g_1(x_1) = s(1, x_1) = C_{x_1}^1 = x_1$.

Ainsi g_1 est l'application identité de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

– On trouve $g_2(x_1, x_2) = x_1 + s(2, x_1+x_2) = x_1 + C_{x_1+x_2+1}^2 = x_1 + \frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2}$

On constate que g_2 n'est autre que l'application f (ou encore f_2).

– On trouve enfin :

$$\begin{aligned} g_3(x_1, x_2, x_3) &= g_2(x_1, x_2) + C_{x_1+x_2+x_3+2}^3 \\ &= x_1 + \frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2!} + \frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3+1)(x_1+x_2+x_3+2)}{3!} \end{aligned}$$

On sait que $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, y) = x_1 + \frac{(x_1+y)(x_1+y+1)}{2}$, avec $y = f(x_2, x_3)$.

Le terme dominant en x_1 dans $g(x_1, x_2, x_3)$ est $\frac{x_1^2}{4}$ (y ne dépend pas de x_1 .)

En revanche le terme dominant en x_1 dans $g_3(x_1, x_2, x_3)$ est $\frac{x_1^3}{6}$.

Cette différence suffit à prouver que g_3 est distincte de g (c'est-à-dire de f_3 .)

[Q]

(b) L'inégalité $s(k, x_1 + \dots + x_k) \leq g_k(x_1, \dots, x_k)$ est évidente et résulte de (E).

On va montrer $g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, x_1 + \dots + x_k + 1)$ par récurrence sur k .

Cette inégalité est évidente si $k = 1$ car $g_1(x_1) = x_1$ et $s(1, x_1 + 1) = x_1 + 1$.

On suppose qu'elle est vraie pour un rang $k \geq 1$ donné.

On a alors successivement (les justifications sont données après) :

$$\begin{aligned}
 g_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) &= g_k(x_1, \dots, x_k) + s(k+1, x_1 + \dots + x_{k+1}) & (i) \\
 &< s(k, x_1 + \dots + x_k + 1) + s(k+1, x_1 + \dots + x_{k+1}) & (ii) \\
 &\leq s(k, x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + 1) + s(k+1, x_1 + \dots + x_{k+1}) & (iii) \\
 &= s(k+1, x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + 1) & (iv)
 \end{aligned}$$

Finalement $g_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) < s(k+1, x_1 + \dots + x_k + x_{k+1} + 1)$.

Voici les justifications des étapes précédentes :

(i) C'est la remarque notée (E) dans l'énoncé.

(ii) C'est l'hypothèse de récurrence.

(iii) On utilise le fait que $p \leq p' \Rightarrow s(k, p) \leq s(k, p')$ (question (6e)).

(iv) On utilise ici la question (6d), avec $p = x_1 + \dots + x_{k+1}$.

On a ainsi démontré la propriété au rang $k + 1$, ce qui achève la récurrence. [Q]

(c) On suppose donc que $g_k(x_1, \dots, x_k) = g_k(x'_1, \dots, x'_k)$.

La question précédente donne alors :

$$s(k, x_1 + \dots + x_k) \leq g_k(x_1, \dots, x_k) = g_k(x'_1, \dots, x'_k) < s(k, x'_1 + \dots + x'_k + 1)$$

On obtient donc : $s(k, x_1 + \dots + x_k) < s(k, x'_1 + \dots + x'_k + 1)$.

Mais on se souvient que la suite $p \mapsto s(k, p)$ est strictement croissante.

Il en découle l'inégalité $x_1 + \dots + x_k \leq x'_1 + \dots + x'_k$.

Par symétrie du problème, on a aussi l'inégalité inverse.

On a donc prouvé l'égalité $x_1 + \dots + x_k = x'_1 + \dots + x'_k$. [Q]

(d) Montrons par récurrence sur k que les applications g_k sont injectives.

La propriété est vraie si $k = 1$ car g_1 est l'application identité de \mathbb{N} .

Soit $k \geq 2$ tel que g_{k-1} soit injective. Montrons que g_k est injective.

Pour cela, on se donne (x_1, \dots, x_k) et (x'_1, \dots, x'_k) tels que $g_k(x_1, \dots, x_k) = g_k(x'_1, \dots, x'_k)$.

La question précédente donne l'égalité (E') : $x_1 + \dots + x_k = x'_1 + \dots + x'_k$.

Mais on sait (en réécrivant l'égalité (E) indiquée dans l'énoncé) que :

$$\begin{cases}
 g_k(x_1, \dots, x_k) = g_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + s(k, x_1 + \dots + x_k) \\
 g_k(x'_1, \dots, x'_k) = g_{k-1}(x'_1, \dots, x'_{k-1}) + s(k, x'_1 + \dots + x'_k)
 \end{cases}$$

Par différence membre à membre, on obtient $g_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = g_{k-1}(x'_1, \dots, x'_{k-1})$.

L'hypothèse de récurrence (g_{k-1} injective) donne alors $(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x'_1, \dots, x'_{k-1})$.

L'égalité (E') fournit enfin $x_k = x'_k$.

Conclusion : on a prouvé que g_k est injective, ce qui achève la récurrence. [Q]

(e) On sait que : $s(k, x_1 + \dots + x_k) \leq g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, x_1 + \dots + x_k + 1)$.

On sait aussi que la suite $p \mapsto s(k, p)$ est strictement croissante.

On en déduit que l'inégalité $g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, p)$ équivaut à $x_1 + \dots + x_k < p$.

Autrement dit $g_k(x_1, \dots, x_k) < s(k, p) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in S_{k,p}$.

Ce résultat montre que g_k envoie l'ensemble $S_{k,p}$ (dont le cardinal est $s(k, p)$) sur l'intervalle d'entiers $I_{k,p} = [0, \dots, s(k, p)[$ (dont le cardinal est également $s(k, p)$.)



La restriction de g_k à $S_{k,p}$ est donc injective (car g_k est injective) de $S_{k,p}$ dans $I_{k,p}$.
Puisque ces deux ensembles ont même cardinal, cette restriction est une bijection.

Ainsi tout élément de $I_{k,p}$ possède un antécédent (et un seul) dans $S_{k,p}$.

Enfin, tout entier n figure dans un $I_{k,p}$, pour p assez grand, car $\lim_{p \rightarrow +\infty} s_{k,p} = +\infty$.

Tout n de \mathbb{N} possède donc un antécédent (et un seul par injectivité) dans \mathbb{N}^k .

Conclusion : l'application g_k est une bijection de \mathbb{N}^k sur \mathbb{N} . [Q]