Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE
Cinématique plane : Résolution graphique

Sommaire

1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE 2

2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN 2

2.1. DEFINITION 2
2.2. THEOREME 2

3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE 3

3.1. TRADUCTION GEOMETRIQUE DE L'EQUIPROJECTIVITE : 4
3.1.1. Traduction géométrique de la relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ *4*
3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité *4*
3.2. CENTRE INSTANTANE DE ROTATION OU C.I.R. 4
3.2.1. Définition *4*
3.2.2. Propriété du CIR *5*
3.2.3. Détermination analytique du centre instantané de rotation *5*
3.3. BASE ET ROULANTE 5
3.3.1. Définition *5*
3.3.2. Propriétés *5*
3.3.3. Détermination analytique de la roulante dans un mouvement plan sur plan *5*
3.3.4. Détermination analytique de la base dans un mouvement plan sur plan *5*
3.3.5. Exemple de détermination de la base et de la roulante d'un mouvement. *6*
3.3.5..1 Présentation du système support de l'étude 6
3.3.5..2 Recherche du centre instantané de rotation I 6
3.3.5..3 Equation cartésienne de la base du mouvement de R1 par rapport à R0. 7
3.3.5..4 Equation cartésienne de la roulante du mouvement de R1 par rapport à R0. 7
3.3.5..5 Tracer de la base et roulante du mouvement de R1 par rapport à R0. 7
3.4. DISTRIBUTION DES VECTEURS-VITESSE A PARTIR DU CENTRE INSTANTANE DE ROTATION 8
3.5. DETERMINATION DE TOUS LES CENTRES INSTANTANES DE ROTATION 8
3.6. THEOREME DES TROIS PLANS GLISSANTS (OU DES TROIS PLANS MOBILES OU DES TROIS C.I.R.) 9

4. MODÉLISATION PLANE DES MECANISMES 10

4.1. MODELES DES LIAISONS DITES PLANES 10

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

La cinématique des solides : Mouvement plan

Cinématique : Etude des mouvements sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

1. DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

On appelle système matériel un ensemble de points matériels. Un solide indéformable S est un système matériel, tel que la distance entre deux points A et B appartenant à ce système, reste constante au cours du temps et quel que soit sa position dans l'espace :

$$\forall A \in S \quad \text{et} \quad \forall B \in S\ ,\ \|\overrightarrow{AB}\| = cte \ \text{dans le temps et dans l'espace}$$

Le champ des vecteurs-vitesse d'un solide est antisymétrique et équiprojectif (voir cours « la cinématique des solides »). Ainsi pour deux points A et B appartenant au solide S_k en mouvement par rapport à un repère R_i, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_k/R_i}} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$$

2. CINEMATIQUE PLANE : MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

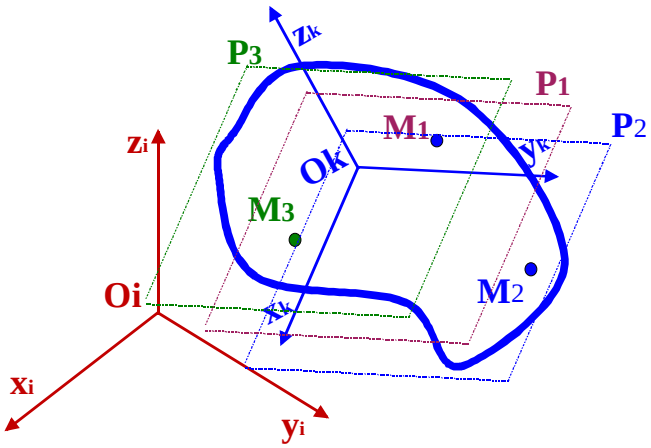
2.1. Définition

Un solide est animé d'un mouvement plan sur plan dans un repère de référence donné, si à tout instant, les vecteurs-vitesse de tous ses points restent parallèles à un plan fixe.

2.2. Théorème

Si trois points non alignés d'un solide S_k ont leur trajectoire dans un plan (P_i) appartenant au solide S_i, alors tous les points du solide S_k sont animés d'un mouvement plan, le plan du mouvement étant parallèle au plan (P_i).
Le mouvement du solide S_k est à tout instant une rotation instantanée d'axe perpendiculaire au plan (P_i).

Démonstration :
Soient trois points non alignés M_1, M_2 et M_3 appartenant au solide S_k et se déplaçant respectivement dans les plans P_1, P_2 et P_3 Parallèles entre eux de normale $\vec{z}_k$, dans un mouvement par rapport au solide S_i. de repère associé Ri.



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Nous pouvons donc affirmer que les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}$, $\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ appartiennent aux plans $(P_{i=1,2,3})$.

La formule du champ des vecteurs-vitesse pour un solide nous permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_1},$$

$$\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{O_kM_2},$$

$$\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{V_{O_k\in S_k/R_i}}+\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_{ii}}}\wedge\overrightarrow{O_kM_3}$$

À partir des trois relations ci-dessus, nous obtenons :

$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_2M_1}$ soit $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$

$\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}=\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\wedge\overrightarrow{M_3M_1}$ soit $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}\perp\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$

Les trois points M_1, M_2 et M_3, non alignés, ont un mouvement à priori quelconque. Donc $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_2\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}-\overrightarrow{V_{M_3\in S_k/R_i}}$ sont deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i).

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$, perpendiculaire à deux vecteurs non colinéaires aux plans (P_i), est donc perpendiculaire à ces plans (P_i).

Le torseur cinématique caractéristique du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i s'écrit en un point quelconque, M_1 par exemple :

$$\{V(S_k/S_i)\}=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}\\ \overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}\end{array}\right\}_{M_1}=\left\{\begin{array}{l}0,\ 0,\omega_z\\ V_x,V_y,\ 0\end{array}\right\}_{M_1,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k}\quad ou\ \overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}.\overrightarrow{V_{M_1\in S_k/R_i}}=0$$

L'automoment de ce torseur est donc nul. C'est un torseur- glisseur. Donc en tout point I appartenant à l'axe du glisseur, nous avons $\overrightarrow{V_{I\in S_k/R_i}}=\vec{0}$.

Ainsi tous les points de l'axe central (Δ_{ki}), perpendiculaire aux plans (P_i), du torseur cinématique caractérisant le mouvement plan sur plan du solide S_k par rapport au repère R_i ont une vitesse nulle.

Le mouvement est donc une rotation instantanée d'axe $(I,\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}})$ perpendiculaire aux plans (P_i).

En conclusion, si les trois points M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires dans les plans (P_i), tous les points appartenant respectivement aux normales à ces plans issues de M_1, M_2 et M_3 ont leurs trajectoires appartenant à des plans parallèles au plan (P_i).

Donc l'étude du mouvement plan d'un solide se ramène à l'étude du mouvement des points d'un plan (P_k) appartenant au solide (S_k) et qui reste en coïncidence avec un plan (P_i) lié au solide (S_i). Ce mouvement, qui est une rotation instantanée d'axe $\overrightarrow{\Omega_{Sk/R_i}}$ perpendiculaire au plan (Pi), est appelé mouvement plan sur plan.

3. APPLICATION DE LA PROPRIÉTÉ D'ÉQUIPROJECTIVITÉ DU CHAMP DES VECTEURS-VITESSE

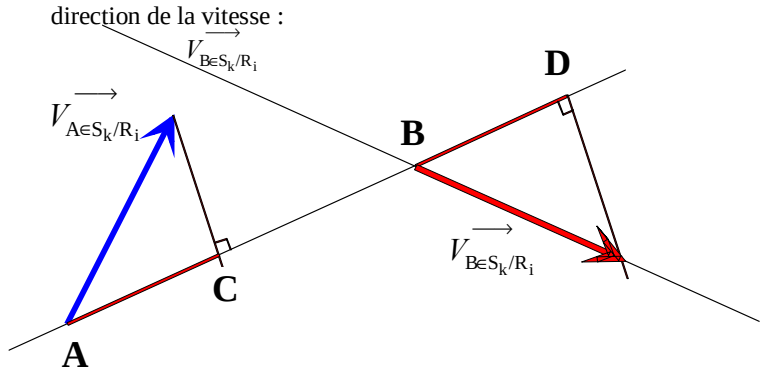
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

3.1. Traduction géométrique de l'équiprojectivité :

3.1.1. Traduction géométrique de la relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ traduit que la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$ est égale à la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ sur la direction de $\overrightarrow{AB}$. D'où la construction géométrique suivante :



Les projections orthogonales $\overline{AC}=\overline{BD}$, respectivement des vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$, sur la droite orientée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont des mesures algébriques. Ces projections sont donc du même côté par rapport aux points A et B.

3.1.2. Analyse et utilisation de la relation d'équiprojectivité

La relation $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}.\overrightarrow{AB}$ est une relation scalaire. A priori nous avons quatre inconnues scalaires dans le plan formé par les vecteurs-vitesse $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ et $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$. Nous ne pouvons donc appliquer cette relation d'équiprojectivité que dans la condition suivante : l*e vecteur-vitesse du point A et la direction du vecteur-vitesse du point B sont connus.*

L'ordre des opérations est le suivant :

1. projeter $\overrightarrow{V_{A\in S_k/R_i}}$ sur la droite (A,B) ce qui donne $\overline{AC}$,
2. placer le point D sur la droite (A,B) tel que : $\overline{AC}=\overline{BD}$,
3. du point D, élever une perpendiculaire à la droite AB qui coupe la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ en un point qui est l'extrémité de ce vecteur.

Remarque :

Cette construction est impossible si la direction du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V_{B\in S_k/R_i}}$ est perpendiculaire à la droite (A,B).

3.2. Centre instantané de rotation ou C.I.R.

3.2.1. Définition

On appelle centre instantané de rotation I_{ki} du mouvement du solide S_k par rapport au solide S_i le point où l'axe central (Δ_{ki}), du torseur cinématique caractérisant ce mouvement, perce le plan d'étude.

Remarque :

Cette définition nous montre que :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.