



# CINETIQUE DES SYSTEMES MATERIELS

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*

1	Conservation de la masse d'un système matériel en mécanique classique .....	1
1.1	Système matériel de solides.....	1
1.2	Masse d'un système matériel E.....	2
1.3	Principe de conservation de la masse en mécanique classique .....	2
2	Centre d'inertie d'un système matériel.....	3
2.1	Définition.....	3
2.2	Détermination directe de G .....	3
2.3	Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E.....	3
3	Torseur cinétique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R.....	6
3.1	Définition.....	6
3.2	Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$ .....	6
3.3	Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R .....	8
3.4	Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère $R_s$ lié à S .....	9
3.5	Théorème de Huyghens .....	12
3.6	Moments d'inertie particuliers .....	16
4	Energie cinétique d'un système matériel E, en mouvement par rapport à un repère R.....	18
4.1	Définition.....	18
4.2	Calcul de l'énergie cinétique du système matériel E, en mouvement relativement au repère R..	18
5	Torseur dynamique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R .....	20
5.1	Définition.....	20
5.2	Calcul de la résultante dynamique $\vec{R}_d(E/R)$ .....	21
5.3	Calcul du moment dynamique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R .....	22

\*\*\*\*\*

## 1 CONSERVATION DE LA MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL EN MECANIQUE CLASSIQUE

### 1.1 *Système matériel de solides*

#### 1.1.1 SOLIDE INDEFORMABLE

Comme nous l'avons vu en Cinématique, un solide indéformable S est un ensemble de points tels que la distance de deux quelconques de ces points reste constante au cours du mouvement du solide.

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \|\vec{AB}\| = c^{ste}$$

1.1.2 SYSTEME MATERIEL DE SOLIDES  $E = \bigcup_{i=1}^n S_i$

En Dynamique, nous étudierons principalement le comportement des systèmes matériels de solides modélisables par des mécanismes à chaînes simples ou complexes, ouvertes ou fermées.

Les solides sont considérés comme indéformables. Les liaisons reliant les solides sont considérées comme réelles (éventuellement avec frottement).

**1.2 Masse d'un système matériel E**

1.2.1 DEFINITION

A toute partie  $E_i(t)$  du système matériel  $E(t)$ , on associe une mesure positive et additive notée  $m[E_i(t)]$  telle que :

$$m[E_i(t)] \geq 0$$

$$m[E_i(t) \cup E_j(t)] = m[E_i(t)] + m[E_j(t)] \quad \text{avec} \quad E_i(t) \cap E_j(t) = \emptyset$$

$$m[E(t)] = \int_{E(t)} dm$$

1.2.2 CONSEQUENCE

Soit  $E(t)$  un système matériel en mouvement par rapport à un repère  $R$  tel que  $E(t) = \bigcup_{i=1}^n S_i$ . Si  $\vec{\varphi}[P(t)]$  est une fonction vectorielle définie pour tout point  $P$  de  $E(t)$  tel que :  $P(t) \rightarrow \vec{\varphi}[P(t)]$  alors on démontre que :

$$\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)] dm = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \vec{\varphi}[P(t)] dm \quad (1)$$

**1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique**

1.3.1 SYSTEME MATERIEL FERME

La masse d'un système matériel fermé est constante au cours du temps .

$$\frac{d[m(E(t))]}{dt} = 0 \Rightarrow m(E(t)) = m(E) = C^{te}$$

1.3.2 CONSEQUENCE

Soit  $E(t)$  un système matériel en mouvement par rapport à un repère  $R$ .

Si  $\vec{\varphi}[P(t)]$  est une fonction vectorielle continûment dérivable par rapport à  $t$ , définie pour tout point  $P$  de  $E(t)$ , on démontre que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)] dm \right]_R = \int_{E(t)} \left[ \frac{d}{dt} \vec{\varphi}[P(t)] \right]_R dm \quad (2)$$

## 2 CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

### 2.1 Définition

Soit  $E(t)$  la configuration, à l'instant  $t$ , du système matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au repère  $R$ .

Le centre d'inertie du système matériel  $E$ , noté  $G$ , est donné par la relation :

$$\int_{E(t)} \vec{GP} \, dm = \vec{0} \quad (3)$$

### 2.2 Détermination directe de $G$

#### 2.2.1 EXISTENCE DE $G$

Posons  $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$  où  $A$  désigne un point quelconque, d'après (3) on a :

$$\int_{E(t)} \vec{AP} \, dm = \int_{E(t)} \vec{AG} \, dm$$

or  $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$  est indépendant de  $m$  et  $t$ , donc :

$$\int_{E(t)} \vec{AP} \, dm = \vec{AG} \int_{E(t)} dm$$

soit

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm \quad (4)$$

#### 2.2.2 UNICITE DE $G$

Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux points vérifiant la relation (4)

$$\vec{AG}_1 = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm$$

$$\vec{AG}_2 = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} \, dm$$

d'où

$$\vec{AG}_1 - \vec{AG}_2 = \vec{0}$$

donc

$$G_1 \equiv G_2 \equiv G$$

### 2.3 Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel $E$

#### 2.3.1 LE SYSTEME MATERIEL $E$ EST CONSTITUE DE $N$ SOLIDES $S_i$

On a donc

$$E = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

et

$$m(E) = \sum_{i=1}^n m(S_i) = \sum_{i=1}^n m_i$$

si  $G_i$  désigne le centre d'inertie du solide  $S_i$

si  $m_i$  désigne la masse du solide  $S_i$

D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP} dm$$

D'après (1)

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \int_{S_i} \vec{AP} dm \right]}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

donc

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5)$$

G est donc le barycentre de tous les points  $G_i$  affectés des masses  $m_i$

### 2.3.2 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

#### 2.3.2.1 Définition

D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(S)} \int_{S(t)} \vec{AP} dm$$

Si on pose  $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

on a  $\vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

et  $AP = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

il vient:

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x dm}{m} \quad y_G = \frac{\int_{E(t)} y dm}{m} \quad z_G = \frac{\int_{E(t)} z dm}{m} \quad (6)$$

#### 2.3.2.2 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique du centre d'inertie d'un solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

Si  $xAy$  est plan de symétrie du solide  $S$ , alors :

$$z_G = \frac{\int z dm}{m} = 0$$

Si  $xAz$  est plan de symétrie du solide  $S$ , alors :

$$y_G = \frac{\int y dm}{m} = 0$$

Si  $yAz$  est plan de symétrie du solide  $S$ , alors :

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = 0$$

Si  $(A,z)$  est axe de symétrie de révolution, alors :

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} = 0$$

$$y_G = \frac{\int y dm}{m} = 0$$

### 3 TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE R

#### 3.1 Définition

On appelle torseur cinétique, au point A, du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R, le torseur noté  $\{C(E/R)\}_A$  défini par :

$$\{C(E/R)\} = \begin{cases} \vec{R}_c(E/R) = \vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm \\ \vec{\sigma}(A, E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \end{cases} \quad (8)$$

le vecteur  $\vec{P}(E/R)$  est la résultante cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R.

le vecteur  $\vec{\sigma}(A, E/R)$  est le moment cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère R.

Vérifions que  $\{C(E/R)\}$  est bien un torseur.

Calculons  $\vec{\sigma}(B, E/R)$ , B étant un point quelconque.

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \vec{BP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \int_{P \in E(t)} \vec{BA} \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{BA} \wedge \int_{P \in E(t)} \vec{V}(P/R) dm + \vec{\sigma}(A, E/R)$$

d'après (6)

soit

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{\sigma}(A, E/R) + \vec{BA} \wedge \vec{P}(E/R) \quad (9)$$

$\{C(E/R)\}$  est donc bien un torseur.

#### 3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$

##### 3.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{P}(E/R)$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm$$

si O est un point fixe dans R,

$$\vec{P}(E/R) = \int_E \left[ \frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R dm$$

d'après (2),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt} \left[ \int_E \vec{OP} dm \right]_R$$

d'après (4),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt} \left[ m \vec{OG} \right]_R$$

d'après (2),

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = m \vec{V}(G/R)} \quad (10)$$

où m désigne la masse du système matériel E  
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

### 3.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{P}(E/R)$

#### 3.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{P}(S/R) = m \vec{V}(G/R)} \quad (11)$$

où m désigne la masse du solide S  
G désigne le centre d'inertie du solide S

#### 3.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides $S_i$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm$$

d'où

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{S_i} \vec{V}(P/R) dm \right]$$

donc

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{P}(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(G_i/R)} \quad (12)$$

où  $m_i$  désigne la masse du solide  $S_i$   
 $G_i$  désigne le centre d'inertie du solide  $S_i$

*Remarque: Le vecteur  $\vec{P}(E/R)$  est aussi appelé vecteur quantité de mouvement du système matériel E en mouvement par rapport au repère R.*

**3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R**

3.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES  $S_i$

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

d'après (1)

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{S_i} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \right]$$

soit

$$\vec{\sigma}(A, E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}(A, S_i/R) \quad (13)$$

où

$\vec{\sigma}(A, S_i/R)$  désigne le moment cinétique, au point A, du solide  $S_i$  dans son mouvement par rapport à R.

3.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

**3.3.2.1 Calcul direct de  $\vec{\sigma}(A, S/R)$**

Ce calcul s'effectue en tenant compte des points suivants :

A désigne le point quelconque où est calculé  $\vec{\sigma}(A, S/R)$ . A peut être fixe ou mobile dans R..

B désigne un point particulier de S et P désigne un point courant de S.

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \quad \vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[ \vec{V}(B, S/R) + \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm \quad B \text{ et } P$$

appartenant à S

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(B, S/R) dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left[ \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

or  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$

donc :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} dm \wedge \vec{V}(B, S/R) + \int_S \vec{AP} \wedge \left[ \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm + \int_S \vec{BP} \wedge \left[ \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

Finalement :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(B/R) + m \vec{AB} \wedge \left[ \vec{GB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] + \int_S \vec{BP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BP} \right] dm \quad (14)$$



Remarque: Bien que la relation (14) donne l'expression du vecteur  $\vec{\sigma}(A, S/R)$ , ce dernier n'est jamais calculé par la relation (14). Dans la pratique, on calcule  $\vec{\sigma}(A, S/R)$  grâce aux trois cas particuliers détaillés ci dessous.

### 3.3.2.2 Calcul pratique de $\vec{\sigma}(A, S/R)$

- **Si B est confondu avec A**

Le point de calcul A de  $\vec{\sigma}(A, S/R)$  est le point B où est connu l'opérateur d'inertie  $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$ , soit :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A/R) + \int_S \vec{AP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right] dm \quad (15)$$

- **Si B est confondu avec A fixe dans R**

Le point de calcul A de  $\vec{\sigma}(A, S/R)$  est fixe dans R et est, de plus, le point B où est connu l'opérateur d'inertie  $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$ , soit :

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right] dm \quad (16)$$

- **Si B est confondu avec G centre d'inertie de S**

Le centre d'inertie G est le point B où est connu l'opérateur d'inertie  $\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R))$ , soit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S/R) &= \vec{\sigma}(G, S/R) + m \vec{AG} \wedge \vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}(G, S/R) &= \int_S \vec{GP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{GP} \right] dm \end{aligned} \quad (17)$$

## 3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère $R_s$ lié à S

### 3.4.1 DEFINITION

Les expressions (15), (16) et (17) montrent l'existence de l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur  $\vec{\Omega}(S/R)$ .

$$\vec{J}(B, \vec{\Omega}(S/R)) = \int_S \vec{BP} \wedge \left[ \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BP} \right] dm$$

Si on pose :

$$R_s = (B, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) \text{ repère lié à S et,}$$

$$B_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) \text{ base associée à } R_s.$$

On peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) = p\vec{x}_s + q\vec{y}_s + r\vec{z}_s$$

$$\vec{BP} = x\vec{x}_s + y\vec{y}_s + z\vec{z}_s$$