CINETIQUE
DES SYSTEMES MATERIELS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

* *

1 Conservation de la masse d'un système matériel en mécanique classique 1
1.1 Système matériel de solides 1
1.2 Masse d'un système matériel E 2
1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique 2
2 Centre d'inertie d'un système matériel 3
2.1 Définition 3
2.2 Détermination directe de G 3
2.3 Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E 3
3 Torseur cinétique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère *R* 6
3.1 Définition 6
3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$ 6
3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R 8
3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S 9
3.5 Théorème de Huyghens 12
3.6 Moments d'inertie particuliers 16
4 Energie cinétique d'un système matériel E, en mouvement par rapport à un repère R 18
4.1 Définition 18
4.2 Calcul de l'énergie cinétique du système matériel E, en mouvement relativement au repère R. 18
5 Torseur dynamique d'un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R 20
5.1 Définition 20
5.2 Calcul de la résultante dynamique $\vec{R}_d(E/R)$ 21
5.3 Calcul du moment dynamique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R 22

* *

1 CONSERVATION DE LA MASSE D'UN SYSTEME MATERIEL EN MECANIQUE CLASSIQUE

1.1 Système matériel de solides

1.1.1 SOLIDE INDEFORMABLE

Comme nous l'avons vu en Cinématique, un solide indéformable S est un ensemble de points tels que la distance de deux quelconques de ces points reste constante au cours du mouvement du solide.

$$\forall A \in S, \forall B \in S, \left\| \vec{AB} \right\| = c^{ste}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

1.1.2 SYSTEME MATERIEL DE SOLIDES $E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

En Dynamique, nous étudierons principalement le comportement des systèmes matériels de solides modélisables par des mécanismes à chaînes simples ou complexes, ouvertes ou fermées.

Les solides sont considérés comme indéformables. Les liaisons reliant les solides sont considérées comme réelles (éventuellement avec frottement).

1.2 Masse d'un système matériel E

1.2.1 DEFINITION

A toute partie $E_i(t)$ du système matériel E(t), on associe une mesure positive et additive notée $m[E_i(t)]$ telle que :

$$m[E_i(t)] \geq 0$$

$$m[E_i(t) \cup E_j(t)] = m[E_i(t)] + m[E_j(t)] \quad \text{avec} \quad E_i(t) \cap E_j(t) = \varnothing$$

$$m[E(t)] = \int_{E(t)} dm$$

1.2.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R tel que $E(t) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle définie pour tout point P de E(t) tel que : $P(t) \rightarrow \vec{\varphi}[P(t)]$ alors on démontre que :

$$\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)]\, dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \vec{\varphi}[P(t)]\, dm \qquad (1)$$

1.3 Principe de conservation de la masse en mécanique classique

1.3.1 SYSTEME MATERIEL FERME

La masse d'un système matériel fermé est constante au cours du temps .

$$\frac{d[m(E(t))]}{dt} = 0 \Rightarrow m(E(t)) = m(E) = C^{te}$$

1.3.2 CONSEQUENCE

Soit E(t) un système matériel en mouvement par rapport à un repère R .

Si $\vec{\varphi}[P(t)]$ est une fonction vectorielle continûment dérivable par rapport à t, définie pour tout point P de E(t), on démontre que:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{E(t)} \vec{\varphi}[P(t)]dm\right]_R = \int_{E(t)} \left[\frac{d}{dt}\vec{\varphi}[P(t)]\right]_R dm \qquad (2)$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

2 CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTEME MATERIEL

2.1 Définition

Soit E(t) la configuration, à l'instant t, du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

Le centre d'inertie du système matériel E, noté G, est donné par la relation :

$$\int_{E(t)} \vec{GP}\, dm = \vec{0} \qquad (3)$$

2.2 Détermination directe de G

2.2.1 EXISTENCE DE G

Posons $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ où A désigne un point quelconque, d'après (3) on a :

$$\int_{E(t)} \vec{AP}\, dm = \int_{E(t)} \vec{AG}\, dm$$

or $\vec{GP} = \vec{AP} - \vec{AG}$ est indépendant de m et t, donc :

$$\int_{E(t)} \vec{AP}\, dm = \vec{AG} \int_{E(t)} dm$$

soit

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\, dm \qquad (4)$$

2.2.2 UNICITE DE G

Soient G_1 et G_2 deux points vérifiant la relation (4)

$$\vec{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\, dm$$

$$\vec{AG_1} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\, dm$$

d'où

$$\vec{AG_1} - \vec{AG_2} = \vec{0}$$

donc

$$G_1 \equiv G_2 \equiv G$$

2.3 Détermination pratique du centre d'inertie d'un système matériel E

2.3.1 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

On a donc

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

et

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(S_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

si G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i
si m_i désigne la masse du solide S_i
D'après (4)

$$\vec{AG} = \frac{1}{m(E)} \int_{E(t)} \vec{AP}\, dm$$

D'après (1)

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{S_i} \vec{AP}\, dm \right]}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

donc

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (5)}$$

G est donc le barycentre de tous les points G_i affectés des masses m_i

2.3.2 LE SYSTEME MATERIEL E EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

2.3.2.1 Définition

D'après (4)

$$\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{m(S)} \int_{S(t)} \vec{AP}\, dm}$$

Si on pose $R = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

on a $\vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

et $AP = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

il vient:

$$\boxed{x_G = \frac{\int_{E(t)} x\, dm}{m} \quad y_G = \frac{\int_{E(t)} y\, dm}{m} \quad z_G = \frac{\int_{E(t)} z\, dm}{m} \qquad (6)}$$

2.3.2.2 Symétrie matérielle du solide S

La détermination pratique su centre d'inertie d'un solide S passe par la prise en compte des symétries matérielles du solide S.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

Si xAy est plan de symétrie du solide S, alors :

$$z_G = \frac{\int_{E(t)} z\,dm}{m} = 0$$

Si xAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

Si yAz est plan de symétrie du solide S, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

Si (A,z) est axe de symétrie de révolution, alors :

$$x_G = \frac{\int_{E(t)} x\,dm}{m} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_{E(t)} y\,dm}{m} = 0$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

3 TORSEUR CINETIQUE D'UN SYSTEME MATERIEL E EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPERE *R*

3.1 Définition

On appelle torseur cinétique, au point A, du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*, le torseur noté $\{C(E/R)\}_A$ défini par :

$$\{C(E/R)\} = \begin{cases} \vec{R}_C(E/R) = \vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm \\ \vec{\sigma}(A,E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \end{cases} \quad (8)$$

le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est la résultante cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

le vecteur $\vec{\sigma}(A,E/R)$ est le moment cinétique du système matériel E(t) en mouvement par rapport au repère *R*.

Vérifions que $\{C(E/R)\}$ *est bien un torseur.*

Calculons $\vec{\sigma}(B,E/R)$, B étant un point quelconque.

$$\vec{\sigma}(B,E/R) = \int_{P\in E(t)} \vec{BP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B,E/R) = \int_{P\in E(t)} \vec{BA} \wedge \vec{V}(P/R)dm + \int_{P\in E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

$$\vec{\sigma}(B,E/R) = \vec{BA} \wedge \int_{P\in E(t)} \vec{V}(P/R)dm + \vec{\sigma}(A,E/R)$$

d'après (6)

soit

$$\vec{\sigma}(B,E/R) = \vec{\sigma}(A,E/R) + \vec{BA} \wedge \vec{P}(E/R) \quad (9)$$

$\{C(E/R)\}$ *est donc bien un torseur.*

3.2 Calcul de la résultante cinétique $\vec{P}(E/R)$

3.2.1 CALCUL DIRECT DE $\vec{P}(E/R)$

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R)dm$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

si O est un point fixe dans R,

$$\vec{P}(E/R) = \int_E \left[\frac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R dm$$

d'après (2),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[\int_E \vec{OP} dm\right]_R$$

d'après (4),

$$\vec{P}(E/R) = \frac{d}{dt}\left[m\vec{OG}\right]_R$$

d'après (2),

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (10)}$$

où m désigne la masse du système matériel E
G désigne le centre d'inertie du système matériel E.

3.2.2 CALCUL PRATIQUE DE $\vec{P}(E/R)$

3.2.2.1 Le système matériel est constitué d'un seul solide S

$$\boxed{\vec{P}(S/R) = m\vec{V}(G/R) \qquad (11)}$$

où m désigne la masse du solide S
G désigne le centre d'inertie du solide S

3.2.2.2 Le système matériel est constitué de n solides S_i

$$\vec{P}(E/R) = \int_{E(t)} \vec{V}(P/R) dm$$

d'où

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{S_i} \vec{V}(P/R) dm\right]$$

donc

$$\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}(S_i/R)$$

soit

$$\boxed{\vec{P}(E/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}(G_i/R) \qquad (12)}$$

où m_i désigne la masse du solide S_i
G_i désigne le centre d'inertie du solide S_i

Remarque: Le vecteur $\vec{P}(E/R)$ est aussi appelé vecteur quantité de mouvement du système matériel E en mouvement par rapport au repère R.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

3.3 Calcul du moment cinétique, au point A, du système matériel E dans son mouvement par rapport à R

3.3.1 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE DE N SOLIDES S_i

$$\vec{\sigma}(A,E/R) = \int_{E(t)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm$$

d'après (1)

$$\vec{\sigma}(A,E/R) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{S_i} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \right]$$

soit

$$\boxed{\vec{\sigma}(A,E/R) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}(A,S_i/R) \qquad (13)}$$

où

$\vec{\sigma}(A,S_i/R)$ désigne le moment cinétique, au point A, du solide S_i dans son mouvement par rapport à R.

3.3.2 LE SYSTEME MATERIEL EST CONSTITUE D'UN SEUL SOLIDE S

3.3.2.1 Calcul direct de $\vec{\sigma}(A,S/R)$

Ce calcul s'effectue en tenant compte des points suivants :
A désigne le point quelconque où est calculé $\vec{\sigma}(A,S/R)$. *A peut être fixe ou mobile dans R..*
B désigne un point particulier de S et P désigne un point courant de S.

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R)dm \quad \vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{V}(B,S/R) + \vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

B et P appartenant à S

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}(B,S/R)dm + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

or $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$
donc :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \vec{AP}\, dm \wedge \vec{V}(B,S/R) + \int_S \vec{AP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$
$$+ \int_S \vec{BP} \wedge \left[\vec{PB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] dm$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\sigma}(A,S/R) = m\,\vec{AG} \wedge \vec{V}(B/R) + m\,\vec{AB} \wedge \left[\vec{GB} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \right] \\ &+ \int_S \vec{BP} \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{BP} \right] dm \end{aligned} \qquad (14)}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.

Remarque: Bien que la relation (14) donne l'expression du vecteur $\vec{\sigma}(A,S/R)$, *ce dernier n'est jamais calculé par la relation (14). Dans la pratique, on calcule* $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *grâce aux trois cas particuliers détaillés ci dessous.*

3.3.2.2 **Calcul pratique de** $\vec{\sigma}(A,S/R)$

- *Si B est confondu avec A*

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit* :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A/R) + \int_S \overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \qquad (15)$$

- ***Si B est confondu avec A fixe dans R***

Le point de calcul A de $\vec{\sigma}(A,S/R)$ *est fixe dans R et est, de plus, le point B où est connu l'opérateur d'inertie* $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit* :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \qquad (16)$$

- ***Si B est confondu avec G centre d'inertie de S***

Le centre d'inertie G est le point B où est connu l'opérateur d'inertie $\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R))$, *soit* :

$$\begin{aligned}&\vec{\sigma}(A,S/R) = \vec{\sigma}(G,S/R) + m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(G/R)\\ &\vec{\sigma}(G,S/R) = \int_S \overrightarrow{GP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{GP}\right]dm\end{aligned} \qquad (17)$$

3.4 Matrice d'inertie du solide S, en un point A, exprimé dans un repère R_s lié à S

3.4.1 DEFINITION

Les expressions (15), (16) et (17) montrent l'existence de l'opérateur d'inertie du solide S, au point B, appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$.

$$\vec{J}(B,\vec{\Omega}(S/R)) = \int_S \overrightarrow{BP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{BP}\right]dm$$

Si on pose :

$R_S = (B,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ repère lié à S et,

$B_S = (\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ base associée à R_S.

On peut écrire :

$$\vec{\Omega}(S/R) = p\vec{x}_S + q\vec{y}_S + r\vec{z}_S$$

$$\overrightarrow{BP} = x\vec{x}_S + y\vec{y}_S + z\vec{z}_S$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 23 pages.