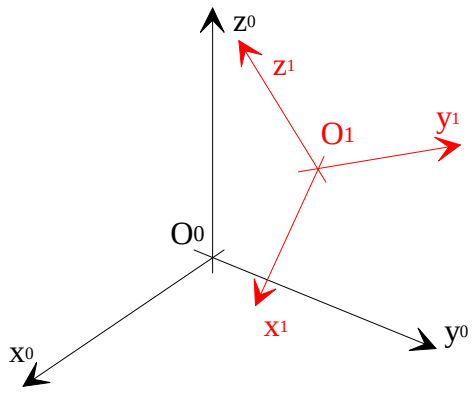
DERIVEE VECTORIELLE

SOMMAIRE

1. DERIVEE VECTORIELLE 1
1.1. NAISSANCE DU VECTEUR ROTATION 1
1.1.1. Le problème 1
1.1.2. Résolution : 1
1.1.3. Unicité de $\overrightarrow{\Omega_{R1/R0}}$ 3
1.1.4. Calcul de $\overrightarrow{\Omega_{R1/R0}}$ pour une rotation autour d'un axe $(A,\vec{z}_{10})$ 3
1.2. DERIVEE VECTORIELLE D'UN VECTEUR UNITAIRE 6
1.3. DERIVATION D'UNE FONCTION VECTORIELLE QUELCONQUE $\overrightarrow{U(t)}$ 6
1.4. LES SAVOIRS INDISPENSABLES SUR LA DERIVEE VECTORIELLE 7
1.4.1. Dérivée d'un vecteur unitaire 7
1.4.2. Dérivée d'une fonction vectorielle 7
1.4.3. Valeur du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{R1/R0}}$ dans un mouvement en rotation autour de l'axe $(A,\vec{z}_{10})$. 7

1. DERIVEE VECTORIELLE.



Soient :

- $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et $\Re_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère affine de base orthonormée directe $R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$
- $\mathbf{R}_1$ est en mouvement par rapport à $\mathbf{R}_0$.

1.1. Naissance du vecteur rotation

1.1.1. Le problème

L'objectif ici, est de déterminer les dérivées des vecteurs $\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1$ par rapport au temps t, dans le repère $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

Ces dérivée seront notées : $\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}$, $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0}$ et $\left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0}$.

1.1.2. Résolution :

Les données : $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est une base orthonormée directe. D'où :

- la condition 1 : $\|\vec{x}_1\| = \vec{x}_1^{\,2} = 1,\quad \|\vec{y}_1\| = \vec{y}_1^{\,2} = 1,\quad \|\vec{z}_1\| = \vec{z}_1^{\,2} = 1$
- la condition 2 : $\vec{x}_1.\vec{y}_1 = 0,\quad \vec{x}_1.\vec{z}_1 = 0,\quad \vec{y}_1.\vec{z}_1 = 0$

En utilisant la condition 1, on obtient par dérivation dans $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = r\vec{y}_1 + s\vec{z}_1 \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = p\vec{z}_1 + t\vec{x}_1 \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} = q\vec{x}_1 + u\vec{y}_1 \end{cases} \text{ où } p,q,r,s,t,u \text{ sont des réels}$$

En utilisant la condition 2, on obtient par dérivation dans $\Re_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{y}_1 + \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 = 0 \\ \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{z}_1 + \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + r = 0 \\ u + p = 0 \\ s + q = 0 \end{cases}$$

les dérivées $\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0}$, $\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0}$ et $\left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0}$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = r\vec{y}_1 - q\vec{z}_1 \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = p\vec{z}_1 - r\vec{x}_1 \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} = q\vec{x}_1 - p\vec{y}_1 \end{cases}$$

On peut donc mettre ce résultat sous la forme :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = r\vec{y}_1 - q\vec{z}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{x}_1 \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} = p\vec{z}_1 - r\vec{x}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{y}_1 \\ \left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{R_1} = q\vec{x}_1 - p\vec{y}_1 = \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} \wedge \vec{z}_1 \end{cases} \quad \text{où } \overrightarrow{\Omega_{R1/R0}} = p\vec{x}_1 + q\vec{y}_1 + r\vec{z}_1$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.