Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2.
2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n.

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p \geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note $N_{n,p}$ le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2)\, N_{n+1,p} + (p-1)\, N_{n,p.}$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de n+2 chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

Card A_{n+2} = Card B_{n+2} + Card C_{n+2}

De plus :

-Card A_{n+2} = U_{n+2} (par définition)

-Card B_{n+2} = U_{n+1} (il y a autant de codages de n+1 chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de n+2 chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card C_{n+2} = U_n (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{ème}$ position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.