Partitions et involutions

Enoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.

a) Calculer a_1 et a_2.

b) Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).

c) A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

a) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^{p} C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p.

c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$.

d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle involution d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. *On note alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, T_m *le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$