Probabilités conditionnelles

Enoncés

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1) On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne, au hasard. Pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, on note E_p l'événement : "le numéro de la boule obtenue au $p^{\text{ème}}$ tirage est inférieur ou égal à chacun des numéros des boules obtenues précédemment".

a) Déterminer la probabilité de E_2 et E_3.
b) Déterminer pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ la probabilité de E_p.

2) On suppose maintenant que les tirages s'effectuent sans remise. Déterminer pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, la probabilité de E_p.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Sur une piste de danse, n couples (n hommes et n femmes) sont formés puis séparés à l'issue d'une première danse. On reconstitue à nouveau n couples, au hasard, pour une seconde danse.

1) Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués ?
2) Quelle est la probabilité qu'aucun des couples initiaux ne soit reconstitué ?

Correction

Exercice 1

1) a) Notons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, U_k l'événement : "la boule obtenue au premier tirage porte le numéro k". La famille $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_2) = \sum_{k=1}^{n} p\left(E_2 / U_k\right) p(U_k).$$

De plus :

- les tirages étant équiprobables, on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p(U_k) = \dfrac{1}{n}$,
- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que l'événement U_k est réalisé, l'événement E_2 est réalisé si, et seulement si, le numéro de la boule obtenue au second tirage est compris entre 1 et k. Il y a donc k tirages favorables, et donc :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ p\left(E_2 / U_k\right) = \frac{k}{n}.$$

On a donc :

$$p(E_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} \quad \text{et donc :}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \quad \text{d'où la conclusion d'après le cours :}$$

$$\boxed{p(E_2) = \frac{n+1}{2n}}$$

Notons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, V_k l'événement : "le plus petit numéro obtenu au cours des deux premiers tirages est k". La famille $(V_k)_{1 \leq k \leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_3) = \sum_{k=1}^{n} p\left(E_3 / V_k\right) p(V_k).$$