Probabilités conditionnelles

Enoncés

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1) On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne, au hasard. Pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, on note E_p l'événement : "le numéro de la boule obtenue au $p^{ème}$ tirage est inférieur ou égal à chacun des numéros des boules obtenues précédemment".

a) Déterminer la probabilité de E_2 et E_3.
b) Déterminer pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ la probabilité de E_p.

2) On suppose maintenant que les tirages s'effectuent sans remise. Déterminer pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, la probabilité de E_p.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Sur une piste de danse, n couples (n hommes et n femmes) sont formés puis séparés à l'issue d'une première danse. On reconstitue à nouveau n couples, au hasard, pour une seconde danse.

1) Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués ?
2) Quelle est la probabilité qu'aucun des couples initiaux ne soit reconstitué ?

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Correction

Exercice 1

1) a) Notons pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, U_k l'événement : "la boule obtenue au premier tirage porte le numéro k". La famille $(U_k)_{1\leq k\leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_2)=\sum_{k=1}^{n} p\left(E_2/U_k\right)p(U_k).$$

De plus :

- les tirages étant équiprobables, on a : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $p(U_k)=\frac{1}{n}$,
- pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, sachant que l'événement U_k est réalisé, l'événement E_2 est réalisé si, et seulement si, le numéro de la boule obtenue au second tirage est compris entre 1 et k. Il y a donc k tirages favorables, et donc :

$$\forall\, k\in[\![1,n]\!],\ p\left(E_2/U_k\right)=\frac{k}{n}.$$

On a donc :

$$p(E_2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{1}{n} \quad \text{et donc :}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \qquad \text{d'où la conclusion d'après le cours :}$$

$$\boxed{p(E_2)=\frac{n+1}{2n}}$$

Notons pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, V_k l'événement : "le plus petit numéro obtenu au cours des deux premiers tirages est k". La famille $(V_k)_{1\leq k\leq n}$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$p(E_3)=\sum_{k=1}^{n} p\left(E_3/V_k\right)p(V_k).$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.