edhec

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées :

Une règle graduée.
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note Δ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $\Delta(f) = g$, définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2) a. Vérifier que, pour toute fonction f de E, $\Delta(f)$ est dérivable.

b. En déduire que Δ n'est pas surjective.

3) Montrer que Δ est injective.

4) On suppose, *dans cette question*, que Δ possède une valeur propre λ non nulle et on désigne par f un vecteur propre associé à λ.

a. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel x, par $h(x) = f(x)\,e^{-\frac{x}{\lambda}}$, est constante.

b. Déterminer alors $\Delta(f)$.

5) Conclure à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre.

6) Pour toute fonction f de E, on pose : $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.

a. Montrer que F_n est de classe C^{n+1}.

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.

1) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0. \\ g(0) = 0. \end{cases}$

a. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$.

c. En déduire que f est continue en 0.

2) Montrer que f est paire.

3) a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) a. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \; |f(x)| < \frac{1}{2x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5) a. Montrer que $f(\pi/2) > 0$ et que $f(\pi) < 0$.

b. Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}\right) \sin(t)\,dt$. En déduire que $f(2\pi) > 0$.

c. Tracer, dans un repère orthonormé, les hyperboles d'équations respectives $y = \frac{1}{2x}$ et $y = -\frac{1}{2x}$, ainsi que l'allure de la courbe représentative de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$.

EXERCICE 3

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
On note A la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, A est donc une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients réels.
On note B la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, B est donc une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice à 3 lignes et 2 colonnes, à coefficients réels.

1) Vérifier que $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) a. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$.

b. Montrer que $\dim \operatorname{Im} g \leq 2$.

c. Déduire des questions précédentes que $\dim \operatorname{Im} g \circ f \leq 2$.

d. Conclure que gof n'est ni surjective, ni injective.

3) En déduire une valeur propre de BA.

On suppose maintenant que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y étant deux réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$.

a. Montrer que $BX \neq 0$.
b. Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est valeur propre de BA.
c. En déduire que BA est diagonalisable.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul.

Partie I

Une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, étant définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, A étant un événement de $\mathcal{A}$, de probabilité non nulle, on définit la variable aléatoire $T = Z / A$ (Z sachant que A est réalisé) par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = P([Z = k] / A)$.

On considère un événement A vérifiant $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.

Montrer que si Z a une espérance, alors Z / A et $Z / \overline{A}$ ont aussi une espérance et que :
$E(Z) = P(A)\, E(Z / A) + P(\overline{A})\, E(Z / \overline{A})$.

Partie II

On dispose de deux urnes, U et V. Initialement, l'urne U est vide et l'urne V contient 2n boules numérotées de 1 à 2n.

On effectue une suite d'épreuves, chacune consistant à choisir, aléatoirement et de manière équiprobable, un nombre compris entre 1 et 2n, puis à transférer la boule portant le numéro choisi, de l'urne dans laquelle elle se trouve dans l'autre urne.

Pour tout entier k élément de $[\![0, 2n]\!]$, on dit que U est dans l'état E_k lorsque U contient k boules et on dit que U accède à l'état E_k lorsque U contient k boules **pour la première fois**.

On note X_k la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves qu'il faut effectuer pour que U accède à l'état E_k et égale à 0 si l'état E_k n'est jamais atteint.

On admettra que X_k a une espérance, notée m_k.

Enfin, pour tout entier j, élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, on pose $N_j = X_{j+1} - X_j$.

Le but de cette partie est d'évaluer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_k, c'est-à-dire d'évaluer le nombre m_k.

1) Montrer que X_0 et X_1 sont des variables certaines et en déduire leurs espérances.

2) a. Donner, pour tout j élément de $[\![0, 2n-1]\!]$, une interprétation de la variable N_j.
   b. Montrer que N_j a une espérance que l'on notera μ_j dans la suite.

3) Soit j un élément de [| 1, 2n -1 |].

a. Soit A_j l'événement : " U accède à l'état E_{j+1} depuis l'état E_j, en une seule épreuve". Calculer $P(A_j)$.

b. Montrer que N_j / A_j est la variable certaine égale à 1 et que $N_j / \overline{A}_j = 1 + N_{j-1} + N_j$.

c. Montrer, en utilisant la partie I, que : $\forall j \in [| 1, 2n -1 |]$, $\mu_j = \dfrac{2n + j\, \mu_{j-1}}{2n - j}$.

d. En déduire que : $\forall j \in [| 0, 2n -1 |]$, $\mu_j = 2n \int_0^1 x^{2n-j-1} (2-x)^j \, dx$

4) Soit k un élément de [| 1, 2n |].

a. Écrire, en la justifiant, la relation liant X_k et $N_0, N_1, \ldots, N_{k-1}$.

b. En déduire la relation liant m_k et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$.

c. Vérifier que : $\forall x \neq 1$, $\sum_{j=0}^{k-1} x^{2n-j-1} (2-x)^j = x^{2n-k} \left(\dfrac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}\right)$.

d. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^{2n-k} \left[\dfrac{x^k - (2-x)^k}{2(x-1)}\right] dx$ est convergente.

5) En déduire que : $\forall k \in [| 0, 2n |]$, $m_k = n \int_0^1 (1-t)^{2n-k} \left[\dfrac{(1+t)^k - (1-t)^k}{t}\right] dt$.

Partie III : étude de deux cas particuliers.

1) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_n, c'est-à-dire pour que, pour la première fois les urnes U et V contiennent le même nombre de boules.

a. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1-(1-t)^{2n}}{t} dt$ converge et vaut $\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k}$ (on pourra utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique).

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t} dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

c. En déduire alors que : $m_n = n \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$.

2) Évaluation du nombre moyen d'épreuves nécessaires pour que U accède à l'état E_{2n}, c'est-à-dire pour que, pour la première fois l'urne V soit vide.

a. Pour tout entier naturel p, on pose : $I_p = \int_0^1 \dfrac{(1+t)^p - (1-t)^p}{t} dt$.

Vérifier que I_p est une intégrale convergente puis calculer $I_p - I_{p-1}$.

b. En déduire que $m_{2n} = n \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{2^k}{k}$.

Exercice 1

1) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue, pour tout x $\mathbb{R}$, sur [x, x + 1], donc, pour tout x $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x f(t)dt$ existe et la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc Δ est une application de E dans E.

Soient alors (f_1, f_2) E^2 et λ $\mathbb{R}$. E étant un espace vectoriel, $f_1 + \lambda f_2$ est un élément de E. Notons alors g_1, g_2 et g les images respectives des fonctions f_1, f_2 et $f_1 + \lambda f_2$ par Δ. On a :

x $\mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x (f_1(t) + \lambda f_2(t))\,dt$ donc, par linéarité de l'intégrale :

$= \int_0^x f_1(t)\,dt + \lambda \int_0^x f_2(t)\,dt$ i.e. :

$= g_1(x) + \lambda g_2(x)$ soit encore :

$\Delta(f_1 + \lambda f_2) = \Delta(f_1) + \lambda \Delta(f_2)$.

Δ est donc une application linéaire de E dans E. On peut donc conclure :

$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de E}}$

2) a) Soit f E. f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'elles. On peut alors écrire, en notant g l'image de f par Δ:

x $\mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - F(0)$.

F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut désormais conclure :

$\boxed{\text{Pour toute fonction f de E, } \Delta(f) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

b) Soit $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'après le résultat précédent, on peut écrire : Im Δ $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Comme $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \neq E$ (par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle appartient à E mais, n'étant pas dérivable en 0, elle n'appartient pas à $\mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ainsi, Im $\Delta \neq E$. On peut donc conclure :

$\boxed{\Delta \text{ n'est pas surjective de E dans E}}$

3) Soit f un élément de Ker Δ. On a :

$\Delta(f) = 0$ $\quad$ $x \ \mathbb{R}, \int_0^x f(t)\,dt = 0$ $\quad$ soit, en notant F la primitive de f qui s'annule en 0 :

$x \ \mathbb{R}, F(x) = 0$ $\quad$ soit, par dérivation, f étant la dérivée de F :

$x \ \mathbb{R}, f(x) = 0$ $\quad$ i.e. :

$f = 0.$

Ainsi, on a : Ker Δ = {0}. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\Delta \text{ est pas injective de E dans E}}$$

4) a) Comme f est un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre λ, on a : $\Delta(f) = \lambda f$, soit, comme λ est une valeur propre non nulle de Δ : $f = \frac{1}{\lambda}\Delta(f)$. Or, d'après le résultat de la question 2b, Δ(f) est dérivable sur ℝ, donc f est dérivable sur ℝ. Ainsi, h est dérivable sur ℝ comme produit de fonction dérivables sur ℝ, et on a :

$$x \ \mathbb{R}, h'(x) = \left(f'(x) - \frac{1}{\lambda} f(x)\right) e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Or, on a : $f' = \frac{1}{\lambda}\Delta(f)'$, donc, comme : $x \ \mathbb{R}, \Delta(x) = \int_0^x f(t)\,dt$: $f' = \frac{1}{\lambda} f$. On peut donc écrire :

$$x \ \mathbb{R}, h'(x) = 0.$$

La fonction h étant de dérivée nulle, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{h est constante sur } \mathbb{R}}$$

b) Comme h est constante sur ℝ, on peut donc écrire qu'il existe un réel c tel que :

$t \ \mathbb{R}, h(t) = c$ $\quad$ i.e. :

$t \ \mathbb{R}, f(t)\,e^{-\frac{t}{\lambda}} = c$ $\quad$ d'où :

$t \ \mathbb{R}, f(t) = c\,e^{\frac{t}{\lambda}}$ $\quad$ donc, par définition de Δ, en notant g l'image de f par Δ :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE - Maxence DEHORTER

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x c\, e^{\frac{t}{\lambda}}\, dt$ i.e. :

$= \left[\lambda c\, e^{t/\lambda}\right]_0^x$ d'où :

$\boxed{\Delta(f) \text{ est la fonction } g \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \lambda c\, e^{\frac{x}{\lambda}} - \lambda c}$

5) Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $f_{\lambda,c}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\lambda,c}(x) = c\,e^{\frac{x}{\lambda}}$. D'après le résultat de la question 4a, si λ est valeur propre de Δ, alors les seules fonctions propres non nulles possibles de Δ associées à la valeur propre λ sont les fonctions $(f_{\lambda,c})_{c \in \mathbb{R}^*}$. Or, d'après le résultat de la question 4b, on a, comme $\lambda c \neq 0$: $\forall c \in \mathbb{R}^*$, $\Delta(f_{\lambda,c}) \neq \lambda f_{\lambda,c}$. Ainsi, Δ ne peut admettre de valeur propre non nulle. De plus, d'après le résultat de la question 3, Δ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de Δ.

On peut donc conclure :

$\boxed{\Delta \text{ n'a aucune valeur propre}}$

6) a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

• Au rang n = 0. Comme $F_0 \in \mathrm{Im}\,\Delta$ et comme $\mathrm{Im}\,\Delta \subset \mathcal{C}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F_0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La propriété est donc vérifiée au rang n = 0.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que F_n soit de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On a : $F_{n+1} = \Delta(F_n)$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(t)\, dt .$$

Ainsi, F_{n+1} est la primitive de F_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Or, par hypothèse de récurrence, F_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Ses primitives, et en particulier F_{n+1}, sont donc de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. La propriété est donc vérifiée au rang n + 1.

• On peut donc conclure :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \text{ est de classe } C^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) ✿ Soit $n \in \mathbb{N}$. F_n étant de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, elle est de classe C^{n+1}, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sur le segment d'extrémités 0 et x. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t)\, dt \text{ ✿}.$$

✿ Soit n $\mathbb{N}^*$. Montrons alors par récurrence que : k $[\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.

• Au rang k = 0. On a : $F_n^{(0)} = F_n$. La propriété est donc bien vérifiée au rang k = 0.

• Soit k $[\![0, n-1]\!]$. Supposons que : $F_n^{(k)} = F_{n-k}$. On a alors : $F_n^{(k+1)} = F_{n-k}'$. Or, par définition de F_{n-k}, F_{n-k} est la primitive de F_{n-k-1} nulle en 0. On a donc : $F_n^{(k+1)} = F_{n-k-1}$. La propriété est donc vérifiée au rang k + 1.

• On a donc : k $[\![0, n]\!]$, $F_n^{(k)} = F_{n-k}$.

En considérant la relation ✿, on peut donc écrire :

$$x \ \mathbb{R},\ F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{n-k}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt$$

donc, comme : k $[\![0, n]\!]$, $F_k(0) = 0$:

$$= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt$$

d'où, comme $F_0' = f$:

$$\boxed{n \ \mathbb{N},\quad x \ \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_0'(t)\,dt}$$

Exercice 2

1) a) g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur ces intervalles. De plus, il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que, quand t est au voisinage de 0 :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3\,\varepsilon(t) \qquad \text{donc :}$$

$$g(t) = -\frac{t}{6} + t\varepsilon(t) \qquad \text{d'où :}$$

$$\lim_{t \to 0} g(t) = 0.$$

Comme g(0) = 0, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{g est continue sur } \mathbb{R}}$$

b) g étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. Soit G l'une d'entre elles. On peut alors écrire : x $\mathbb{R}$, $\int_x^{2x} g(t)\,dt = G(2x) - G(x)$. Or, comme G est continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x \to 0} G(2x) = \lim_{x \to 0} G(x) = G(0) \qquad \text{d'où :}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0}$$

c) On a, par linéarité de l'intégration :

$$x\ \mathbb{R}^*,\ f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\,dt \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \int_x^{2x} g(t)\,dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{soit encore :}$$

$$= \int_x^{2x} g(t)\,dt + \Big[\ln|t|\Big]_x^{2x} \qquad \text{d'où :}$$

$= \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln|2x| - \ln|x|$ soit finalement :

$= \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt + \ln 2.$

Or, d'après le résultat de la question précédente, on a : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{2x} g(t)\,dt = 0$. On a donc : $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \ln 2$. Comme $f(0) = \ln 2$, on peut désormais conclure :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$. La fonction $t \mapsto -t$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut alors écrire, en effectuant le changement de variable $u = -t$ ($du = -dt$) :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{u^2}\,du$ donc, sin étant impaire :

$= \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin u}{u^2}\,du$ i.e. :

$= f(x).$

On peut donc conclure :

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

3) a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur ces intervalles. Ses primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc dérivables sur ces intervalles. Soit G l'une d'entre elles. On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = G(2x) - G(x)$. f étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc conclure :

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et sur } \mathbb{R}_+^*}$$

b) En considérant la primitive G de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ définie précédemment, on a :