Enoncés

EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1 $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}^+$, tendant vers α ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$ où $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty,+\infty\}$) en $+\infty$.

1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$,

1.3 $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

1.4 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

EXERCICE 2

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt .$$

On rappelle que $I_0 = \sqrt{2p}$ et $I_1 = 0$ (cf chapitre Variables à densité).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n en fonction de n.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

EXERCICE 3

Soit $c \in [1, +\infty[$. On considère une fonction g positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[c, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente. On considère également une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient q et N deux entiers naturels tels que : $c \leq q < N$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) Soit ε un réel de $]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\exists q \in [\![c, +\infty[\![,\ \forall n \in [\![q, +\infty[\![,\ (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [\![q+1, +\infty[\![, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)\,dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Corrections

EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge,

- Si $\alpha = +\infty$. Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq 1$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1\, dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$. En raisonnant comme précédemment avec la fonction -f, on montrerait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotidien (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[1, +\infty[$. De plus, on a :

$\forall t \in [e, +\infty[,\ \ln t \geq 1$ soit, en divisant par $t > 0$:

$\forall t \in [e, +\infty[,\ \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ étant continues et positives sur $[1, +¥[$, comme $\grave{0}_1^{+¥} \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\, dt \text{ diverge}}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.