Intégrales impropres

Enoncés

EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1 $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}^+$, tendant vers α ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$ où $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty,+\infty\}$) en $+\infty$.

1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$,

1.3 $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

1.4 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

EXERCICE 2

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On rappelle que $I_0 = \sqrt{2\pi}$ et $I_1 = 0$ (cf chapitre Variables à densité).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE 3

Soit $c \in [1, +\infty[$. On considère une fonction g positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[c, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente. On considère également une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient q et N deux entiers naturels tels que : $c \leq q < N$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt \ + \ g(q)$$

2) Soit ε un réel de $]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\exists q \in [\![c, +\infty[\![, \ \forall n \in [\![q, +\infty[\![, \ (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [\![q+1, +\infty[\![, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)\, dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Corrections

EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge,

- Si $\alpha = +\infty$. Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq 1$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1\,dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$. En raisonnant comme précédemment avec la fonction -f, on montrerait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ diverge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ en tant que quotidien (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[1,+\infty[$. De plus, on a :

$\forall t \in [e,+\infty[$, $\ln t \geq 1$ soit, en divisant par $t > 0$:

$\forall t \in [e,+\infty[,\ \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ étant continues et positives sur $[1,+\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt \text{ diverge}}$$