Continuité, dérivabilité

Enoncé

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

c) h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions:

a) $x \to x^p (p \in \mathbb{N}^*)$,

b) $x \mapsto \ln x$

c) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, x_0 un élément de I et f une fonction dérivable à gauche et à droite en x_0. Montrer que f est continue en x_0.

4) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2, \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|$.

a) Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.

b) Soient a et b deux réels tels que a<b. montrer que toute fonction de classe C^1 sur [a, b] est lipschitzienne sur [a, b].

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE