Méthodes

I. FORMULES DE TAYLOR

- ***Formule de Taylor avec reste intégral***. Soit I un intervalle $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et $(a,b) \in I^2$. On a : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

- ***Majoration du reste, inégalité de Taylor-Lagrange.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I, $(a,b) \in I^2$ et M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment d'extrémités a et b. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  - Quand, on applique l'une des deux formules de Taylor**, l'ordre** d'application est l'indice du dernier terme de la somme,
  - quand on applique l'une des deux formules de Taylor entre deux réels a et b, il n'y a pas d'ordre a priori entre a et b.

- ***Formule de Taylor-Young***. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε continue sur I telle que :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Penser que, dans la pratique, il est préférable d'éviter l'utilisation des « o » dans le développement limité et d'introduire une fonction ε de limite nulle. Cette notation est en effet plus utile pour les calculs et permet d'éviter les erreurs dans les simplifications.

De plus, il faut penser qu'on ne peut donc démontrer aucun résultat valable « pour tout x ».

II. DEVELOPPEMENTS LIMITES

- Soients I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité (d.l.) à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe une suite de réels $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$