Enoncés

Exercice 1. Calcul intégral

1) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_{10}^{15} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$$

a) Justifier l'existence de I.
b) Déterminer deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in [10,15],\ \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

c) Déterminer la valeur de I.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n \, dt.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n(x)$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \tan\theta$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$

4) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - p\,x + \frac{p}{2}\right) dx.$

Exercice 2. Convergence de suites d'intégrales

Soit f une fonction continue sur [0,1]. On définit alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 f(t)\,dt .$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.$

2) On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur [0,1]. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \to +\infty} n I_n = f(1).$$

Correction

Exercice 1.

1)a) La fonction $x \mapsto \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$ étant continue sur [10,15] comme fonction rationnelle définie sur [10,15], on peut conclure :

$$\boxed{\text{I est bien définie.}}$$

b) Soit $x \in [10,15]$. On a :

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{(2A+B)x+(5A-3B)}{(x-3)(2x+5)}$$

Ainsi, pour que A et B conviennent, il suffit donc l'on ait :

$$\begin{cases} 2A+B=-1 \\ 5A-3B=6 \end{cases}$$

d'où après calculs :

$$\begin{cases} A = \dfrac{3}{11} \\ B = -\dfrac{17}{11} \end{cases}$$

soit finalement :

$$\boxed{\forall x \in [10,15], \quad \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{3}{11} \times \frac{1}{x-3} - \frac{17}{11} \times \frac{1}{2x+5}}$$

c) D'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$I = \frac{3}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{2x+5}$$

d'où

$$= \frac{3}{11}\left[\ln|x-3|\right]_{10}^{15} - \frac{17}{11}\left[\frac{\ln|2x+5|}{2}\right]_{10}^{15}$$

$$= \frac{3}{11}\left[\ln(12)-\ln(7)\right] - \frac{17}{22}\left[\ln(35)-\ln(25)\right]$$

soit finalement :

$$\boxed{I = \frac{3}{11}\ln\left(\frac{12}{7}\right) - \frac{17}{22}\ln\left(\frac{7}{5}\right)}$$