Enoncés

Exercice 1. Calcul intégral

1) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_{10}^{15} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$$

a) Justifier l'existence de I.

b) Déterminer deux réels A et B tels que :

$\forall x \in [10,15]$, $\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$

c) Déterminer la valeur de I.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.

b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n(x)$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \tan\theta$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$

4) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - p\,x + \frac{p}{2}\right) dx$.

Exercice 2. Convergence de suites d'intégrales

Soit f une fonction continue sur [0,1]. On définit alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 f(t)\,dt\ .$$

1) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur [0,1]. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(1).$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Correction

Exercice 1.

1)a) La fonction $x \mapsto \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$ étant continue sur [10,15] comme fonction rationnelle définie sur [10,15], on peut conclure :

I est bien définie.

b) Soit $x \in [10,15]$. On a :

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{(2A+B)x+(5A-3B)}{(x-3)(2x+5)}$$

Ainsi, pour que A et B conviennent, il suffit donc l'on ait :

$\begin{cases} 2A+B=-1 \\ 5A-3B=6 \end{cases}$ d'où après calculs :

$\begin{cases} A=\dfrac{3}{11} \\ B=-\dfrac{17}{11} \end{cases}$ soit finalement :

$$\forall x \in [10,15],\ \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{3}{11} \times \frac{1}{x-3} - \frac{17}{11} \times \frac{1}{2x+5}$$

c) D'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$I = \frac{3}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{2x+5}$$ d'où

$$= \frac{3}{11}\left[\ln|x-3|\right]_{10}^{15} - \frac{17}{11}\left[\frac{\ln|2x+5|}{2}\right]_{10}^{15}$$
$$= \frac{3}{11}\left[\ln(12)-\ln(7)\right] - \frac{17}{22}\left[\ln(35)-\ln(25)\right]$$ soit finalement :

$$I = \frac{3}{11}\ln\left(\frac{12}{7}\right) - \frac{17}{22}\ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.