-PROBLEME DE MECANIQUE DU SOLIDE 1-

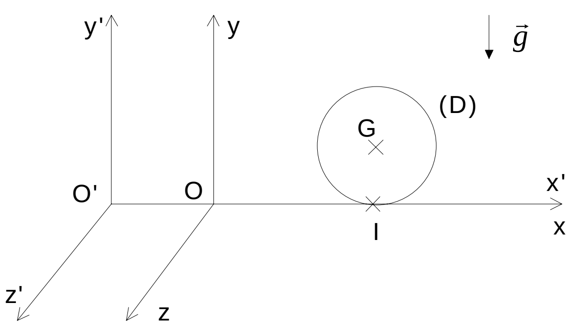
• ENONCE :

« Différents mouvements d'un disque »

• Dans tout le problème, on s'intéresse aux mouvements d'un disque homogène de masse m et de rayon a, de centre d'inertie G ; son moment d'inertie par rapport à un axe passant par G est noté J, et vaut : $J = \frac{1}{2}ma^2$.

• Le plan du disque reste toujours confondu avec le plan vertical xOy.

I. Mouvement d'un disque dans un référentiel non galiléen



Le disque (D) se déplace le long de l'axe Ox horizontal d'un référentiel Oxyz. Ce référentiel est en translation uniformément accélérée par rapport à un référentiel galiléen O'x'y'z' : on note $\vec{\gamma} = \gamma\vec{e}_x$ cette accélération. On appelle $\vec{R}$ la force de contact s'exerçant sur (D) au point I; on note f le coefficient de frottement de glissement supposé constant. A t=0 , les points O, O' et I sont confondus, et **toutes** les vitesses sont nulles.

1.1) On suppose qu'il n'y a pas glissement : déterminer le mouvement du disque dans le référentiel Oxyz ; en déduire les composantes T et N de la force $\vec{R}$ sur les axes respectifs Ox et Oy.

1.2) A quelle condition y a-t-il effectivement non glissement ?

1.3) Calculer de deux manières différentes la puissance fournie par $\vec{R}$ au disque dans le référentiel Oxyz, puis dans le référentiel O'x'y'z' ; on fera d'abord un calcul « direct », puis on appliquera le Théorème de la puissance cinétique.

Est-il paradoxal de trouver que la puissance de la force de frottement est **positive** dans le référentiel O'x'y'z' ? Expliquer.

1.4) Le référentiel Oxyz effectue maintenant des oscillations telles que :

$$\overrightarrow{O'O} = (X_0 \cos\omega t; 0; 0)$$

Calculer l'amplitude des oscillations du point G, dans le référentiel Oxyz, en supposant qu'il n'y a toujours pas de glissement.

Quelle est la valeur maximale de X_0 pour que l'on reste dans ce cas ?

(comme précédemment, les conditions initiales sont nulles).

II. Mouvement d'un disque sur un plan incliné

- Le référentiel Oxyz est maintenant **fixe**, mais l'axe Ox est incliné **vers le bas** d'un angle α $(0 \prec \alpha \prec \pi/2)$ par rapport à l'axe O'x' horizontal.

2.1) Initialement, le disque est immobile et le point I est confondu avec O : on le lâche à t=0. Etudier le mouvement ultérieur de (D) dans le référentiel Oxyz (on calculera en particulier l'abscisse x du point G).

2.2) Montrer qu'il y a glissement ou non, selon la position de α par rapport à une valeur particulière α_L que l'on exprimera en fonction de f ; comparer les deux types de mouvement pour $\alpha = \alpha_L$.

2.3) On suppose $\alpha \prec \alpha_L$; à l'instant t=0, le point I est confondu avec O, mais on communique au disque (D) une vitesse initiale $\vec{v}_0 = (v_0;0;0)$ et une vitesse angulaire $\vec{\omega}_0 = (0;0;\omega_0)$.

a) Montrer que, quelles que soient les vitesses v_0 et ω_0, le mouvement finit par se transformer en un mouvement de roulement sans glissement ; on pourra introduire le coefficient ε qui vaut $+1$ lorsque la vitesse de glissement initiale $(v_0 + a\omega_0)$ est positive, et -1 lorsque cette même vitesse est négative.

b) Calculer la durée t_1 de la phase de glissement ; déterminer l'expression de $x(t)$ quel que soit l'instant t.

2.4) Toujours dans l'hypothèse où $\alpha \prec \alpha_L$, le disque est lancé vers le bas ($v_0 \succ 0$ et ω_0 est quelconque) ; pour $t \prec t_1$, montrer que, selon le signe de ε et la valeur de α, le mouvement de G peut être accéléré ou ralenti.
En particulier, dans le cas où le mouvement est ralenti, montrer qu'il peut exister une valeur minimale de ω_0, notée ω_1, pour laquelle le disque (D) remonte le long du plan incliné avant la fin du glissement (on appellera t_2 l'instant où ce phénomène se produit).

2.5) Représenter les variations de la vitesse de G en fonction du temps, selon les valeurs de ε, α et ω_0 ; calculer t_2 en fonction de g, v_0, α et f ; en déduire la vitesse v_1 de G, en fin de glissement, en fonction de $a, \alpha, f, \omega_0, \varepsilon$ et ω_1.

2.6) On suppose $v_0 \succ 0$, $\varepsilon \succ 0$ et $\tan\alpha \prec f$; montrer qu'il existe une valeur minimale de ω_0, notée ω_2, pour laquelle le disque (D) peut remonter jusqu'au point O avant la fin du glissement.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

• CORRIGE : « Différents mouvements d'un disque »

1.1) Appliquons le Théorème du centre d'inertie au disque (D), dans le référentiel Oxyz **non galiléen** : il faudra tenir compte de **forces d'inertie** ; cependant, comme le référentiel Oxyz est en **translation** par rapport à un référentiel galiléen, la **force de Coriolis** est **nulle**.

• Par ailleurs, la force d'inertie d'entraînement s'écrit dans le cas d'une translation :

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{ie} = -m\vec{\gamma}$ $\Rightarrow$ en notant simplement $\vec{a}$ l'accélération du centre d'inertie G, il vient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{R} = m\vec{g} - m\vec{\gamma} + \vec{N} + \vec{T}$$

• En projection sur les axes Ox et Oy, et en notant x l'abscisse du point G, on obtient :

$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = T - m\gamma} \quad (1) \qquad \boxed{0 = N - mg} \quad (2)$$

Rq : on ne connaît pas le sens de $\vec{T}$, donc le signe de T $\Rightarrow$ dans tout le problème, T désignera une **valeur algébrique** ($\succ 0$ ou $\prec 0$).

• Les forces $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ passant par le point G, elles ont un moment nul en ce point ; le théorème du moment cinétique en G, appliqué dans le référentiel barycentrique du disque, et projeté sur l'axe Gz, fournit l'équation :

$$\boxed{J\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{2}ma^2 \times \frac{d\omega(t)}{dt} = (\overrightarrow{GI} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_z = a \times T} \quad (3)$$

Rq : $\omega(t)$ est la vitesse de rotation du disque sur lui-même, le sens « plus » de rotation étant le **sens trigo**, compte tenu de l'orientation de l'axe Oz.

• Enfin, le roulement sans glissement se traduit par :

$$\vec{v}_{I_1 \in sol/sol} = \vec{0} = \vec{v}_{I_2 \in disque/sol} = \vec{v}_{G/sol} + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{\omega} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + a\omega(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) \Rightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} + a\omega(t) = 0} \quad (4)$$

• On injecte (4) dans (3) pour obtenir : $T = -\dfrac{1}{2}m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ (5)

• En reportant (5) dans (1), il vient :

$\boxed{\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\dfrac{2}{3}\gamma}$ (6) $\Rightarrow$ compte tenu des conditions initiales $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2}{3}\gamma \times t} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = -\frac{\gamma}{3} \times t^2}$$

Rq : le disque recule par rapport au référentiel Oxyz (puisque $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{Oxyz} \prec 0$), mais avance dans le référentiel O'x'y'z', puisque $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{O'x'y'z'} = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{Oxyz} + v_{Oxyz/O'x'y'z'} = -\dfrac{2}{3}\gamma t + \gamma t = \dfrac{\gamma}{3}t \succ 0$.

• La relation (2) fournit : $\boxed{N = mg}$; les relations (5) et (6) conduisent à : $\boxed{T = \dfrac{m\gamma}{3} \succ 0}$