FONCTIONS DE TRANSFERT – FILTRAGE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

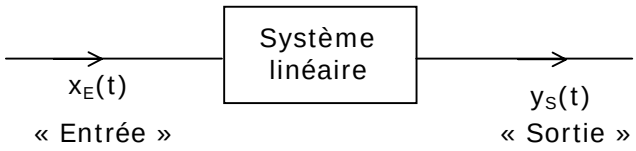
* *

I. Fonction de transfert. 1
II. Filtrage. 6
III. Filtres du 1er ordre. 8
IV. Filtres du 2e ordre. 11

* *

I. Fonction de transfert.

Soit un circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé. Nous étudierons désormais ce circuit sous l'œil de la « commande » : on lui applique une « grandeur d'entrée » $x_E(t)$ (tension ou courant en électronique), et on s'intéresse à une « grandeur de sortie » $y_S(t)$ (tension ou courant également en électronique).



On peut alors définir un système linéaire d'ordre n par un système tel que la relation x_E/y_S soit une <u>équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants</u>. On montre alors que le 2e membre de l'équation peut se mettre sous forme d'une combinaison linéaire de x_E et de ses dérivées successives jusqu'à un ordre m :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \ldots + a_1 \underline{\overset{o}{y}_S} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \underline{\overset{o}{x}_E} + \ldots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

I.1. Définition : l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire en notation complexe :

$$a_n \underline{y_S}^{(n)} + \ldots + a_1 \underline{\overset{o}{y}_S} + a_0 \underline{y_S} = b_0 \underline{x_E} + b_1 \underline{\overset{o}{x}_E} + \ldots + b_m \underline{x_E}^{(m)}$$

Soit :

$$\underline{y_S}\ (a_0 + a_1 (j\omega) + \ldots a_n (j\omega)^n) = \underline{x_E}\ (b_0 + b_1 (j\omega) + \ldots b_m (j\omega)^m)$$

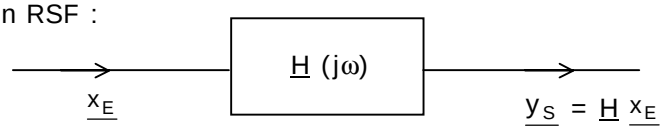
On passe alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \ldots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \ldots + a_n(j\omega)^n}$$

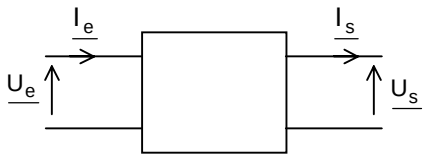
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

$\underline{H}$ (jω) est appelée fonction de transfert du système linéaire, puisque $\underline{y_S}$ et $\underline{x_E}$ sont proportionnels, en RSF :



Rem. : on représente en général un système linéaire en RSF sous forme d'un quadrupôle :

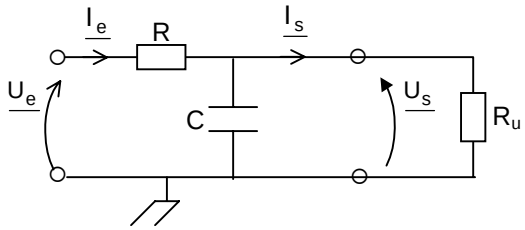


On peut alors définir 4 fonctions de transferts :

- $\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$: « amplification » en tension (sans dimension)
- $\frac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}}$: « amplification » en courant (sans dimension)
- $\frac{\underline{U_s}}{\underline{I_e}}$: « transimpédance » (en Ω)
- $\frac{\underline{I_s}}{\underline{U_e}}$: « transadmittance » (en S)

On notera de plus qu'une fonction de transfert n'est pas une grandeur intrinsèque au quadripôle, mais dépend de sa « charge ».

Ex. :



- $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ « à vide » (si $I_s = 0$ ou $R_u \to \infty$)
- $\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}}$ sinon , où $\underline{Z} = \frac{R_u}{1 + j R_u C\omega}$

I.2. Lien $\underline{H}$ / équation différentielle.

On voit que $\underline{H}$ (jω) est une fraction rationnelle d'ordre n en p = jω.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

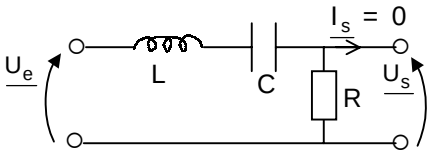
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

*Les coefficients de $\underline{H}$ sont ceux de l'équation différentielle :

- 1^{er} membre <-> dénominateur
- 2^{e} membre <-> numérateur

On peut ainsi, inversement, « remonter » à l'équation différentielle x_E/y_S à partir de la fonction de transfert.

Ex :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{j\,RC\omega}{1 - LC\omega^2 + j\,RC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{U_s}\,(1 + j\omega\,RC + (j\omega)^2\,LC) = j\omega\,RC\,\underline{U_e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{LC\,\overset{oo}{u}_s + RC\,\overset{o}{u}_s + u_s = RC\,\overset{o}{u}_e}$$

(et cette équation différentielle est alors valable, $\forall u_E$, même non sinusoïdale bien sûr).

*En posant $p = j\omega$, les pôles de H(p) vérifient : $a_0 + a_1\,p + \ldots + a_n\,p^n = 0$.

Cette équation est l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Ainsi :

$\underline{p_i}$, pôles de H (p) = racines équation caractéristique

Pour un SL passif, ou actif stable :

$$\underline{R_e(P_i) < 0}$$

*Pour $\omega = 0$: $\underline{H}(o) = H_o = \frac{b_0}{a_0}$ est appelé <u>transfert statique</u>.

Si alors, pour $t > 0$: $x_E = 1$:

$$a_n\,y_S^{(n)} + \ldots + a_1\,\overset{o}{y}_S + a_0\,y_S = b_0$$

$$\Rightarrow \quad y_S(t) = \underbrace{SGESSM}_{\rightarrow\,0 \text{ si } t \rightarrow \infty} + \frac{b_0}{a_0}$$

On voit donc que :

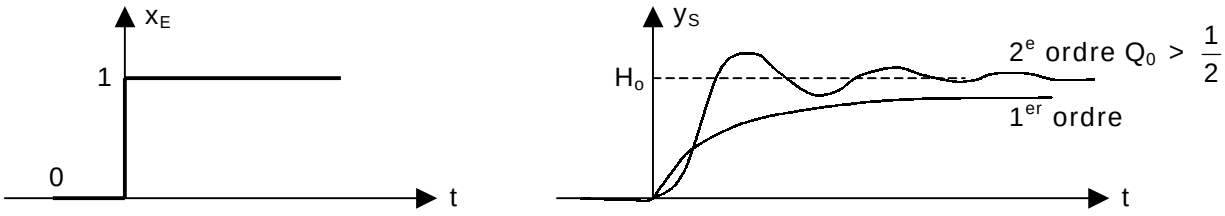
$$\boxed{H_o = H(p = o) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_S(t) \quad \text{si } x_E = 1}$$

En électronique, la réponse à un échelon unité est appelée « <u>réponse indicielle</u> ». Donc :

transfert statique = réponse indicielle en régime permanent

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.



*On montre de même (admis) que :

$$\lim_{p \to \infty} H(p) = y_S(0^+) \text{ si } x_E = 1$$

Rem. : on aura toujours $m \leq n$, sinon :

$\begin{cases} H \to \infty \\ \omega \to \infty \end{cases}$, donc $\begin{cases} y_S \to \infty \\ \omega \to \infty \end{cases}$, ce qui est

exclu pour X_e borné et un système linéaire passif ou actif stable.

I.3. Intérêt de $\underline{H}$

Posons : $\begin{cases} x_E(t) = X_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_E) \text{ <-> } \underline{X_E} = x_e \sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi_E)} \\ Y_S(t) = Y_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_S) \text{ <-> } \underline{Y_s} = Y_s \sqrt{2}\, e^{j(\omega t + \varphi_S)} \end{cases}$

Alors : $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{y_S}}{\underline{x_E}} = \frac{\underline{y_s}}{\underline{x_e}} = \frac{y_s}{x_e} e^{(\varphi_S - \varphi_E)}$$

Si on pose : $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$, on voit que :

$$\begin{cases} |\underline{H}| = H(\omega) = \dfrac{Y_s}{X_e} \\ \text{Arg } \underline{H} = \varphi(\omega) = \varphi_S - \varphi_E = \text{déphasage sortie/entrée} \end{cases}$$

Ainsi, la connaissance de $\underline{H}(j\omega)$ permet de connaître parfaitement la sortie y_S pour une entrée x_E donnée (son amplitude et sa phase à l'origine), pour toute valeur de ω.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

I.4. Représentations de $\underline{H} = H(\omega)\ e^{j\varphi(\omega)}$

*Diagrammes linéaires : on trace $H(\omega)$ et $\varphi(\omega)$



Inconvénient : en électronique, on couvre en général une large plage de fréquences (en TP, avec du matériel de base, on peut couvrir la plage 100 Hz → 100 kHz), et ce mode de représentation est donc peu pratique et peu utilisé.

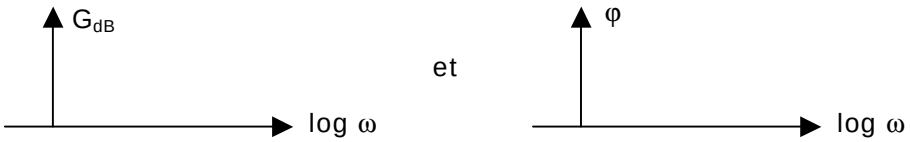
*Diagramme de Bode : il s'agit d'utiliser une échelle logarithmique en abscisse (pour les raisons invoquées ci-dessus).

On définit de plus :

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log H}$$, gain en décibels

(uniquement si $H = \frac{U_s}{U_e}$ ou $H = \frac{I_s}{I_e}$ est sans dimension).

Le diagramme de Bode est alors le tracé des 2 courbes :



Rem. : • On trace en général un diagramme de Bode sur du papier « semi-logarithmique » (avec une échelle logarithmique).

- log $\omega \to -\infty$: un diagramme de Bode ne « s'arrête pas » à log $\omega = 0$.
  $\omega \to 0$

- Si $\underline{H} = \underline{H_1}\ \underline{H_2}$ $\begin{cases} G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$:

on peut alors sommer les deux diagrammes de Bode de $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ pour obtenir celui de $\underline{H}$.

- $\begin{cases} G_{dB} = 0 \Leftrightarrow H = 1 \\ G_{dB} < 0 \Leftrightarrow H < 1 \\ G_{dB} > 0 \Leftrightarrow H > 1 \end{cases}$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

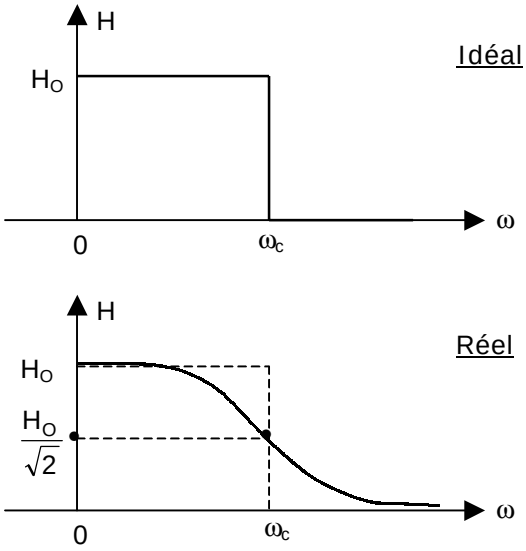
$$\begin{cases} H = 10 \Leftrightarrow G_{dB} = 20 \\ H = 10^{2} \Leftrightarrow G_{dB} = 40 \\ \vdots \\ H = 10^{-1} \Leftrightarrow G_{dB} = -20 \\ H = 10^{-2} \Leftrightarrow G_{dB} = -40 \\ \vdots \end{cases}$$

II. Filtrage.

En électronique, un « filtre » est un système linéaire qui transmet (le plus parfaitement possible) certaines fréquences et atténue (le plus possible) les autres.

Il est caractérisé par sa « bande passante », bande de fréquences (ou de pulsations) transmise par le filtre : $[\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$ ou $\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$. ω_{c_1} et ω_{c_2} sont les « pulsations de coupure ».

II.1. Filtre passe-bas.



Par convention, on définit la « <u>bande passante à –3 dB</u> », c'est-à-dire les pulsations de coupure à –3 dB telles que :

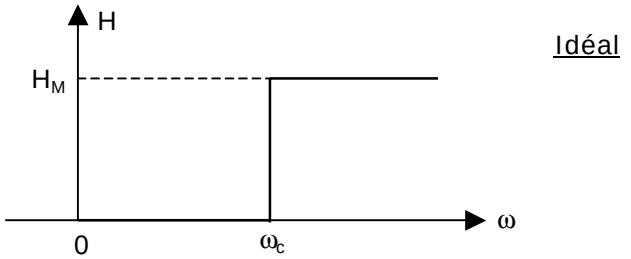
$$H(\omega_c) = \frac{H_{Max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad G(\omega_c) = G_{Max} - 3 \text{ dB}$$

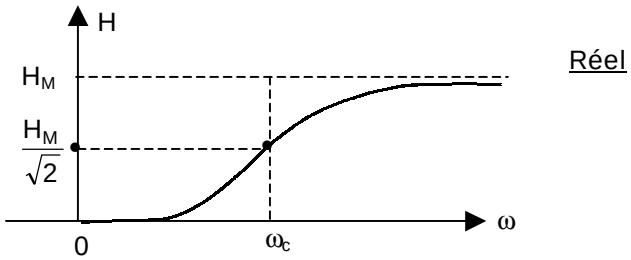
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

II.2. Filtre passe-haut.

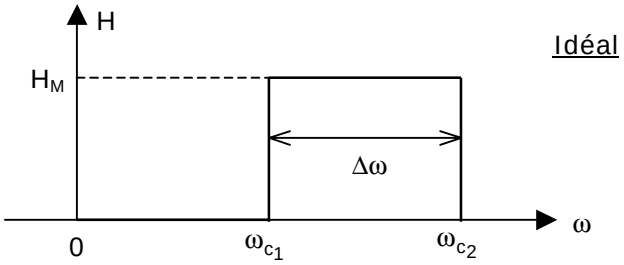


Idéal

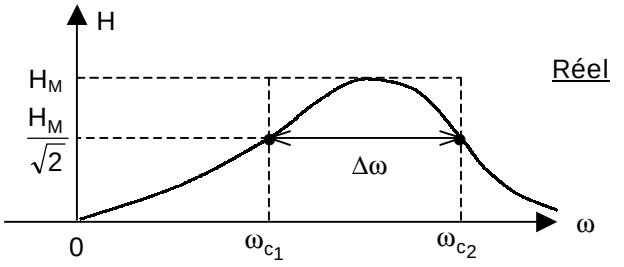


Réel

II.3. Filtre passe-bande :



Idéal



Réel

II.4. Filtre « réjecteur de bande ».

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.