Enoncé

1) Soient $A = \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}$. On note le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par :

$$E = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}), \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, M = aA + bB + cC \right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de E.

2) Montrer que la famille (1, X(X-1), X²(X+1), X(X-1)²) est libre.

3) Montrer que pour tout n∈$\mathbb{N}$, la famille $(x \mapsto x^k \ln^{n-k} x)_{0 \le k \le n}$ est libre.

4) Soit n un entier naturel non nul, $(x_k)_{1 \le k \le n}$ une suite de nombres réels distincts et $(L_i)_{1 \le i \le n}$ la suite de polynômes définis par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$$

Montrer que la famille $(L_i)_{1 \le i \le n}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis donner l'expression de tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.