Applications linéaires

Enoncés

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme P associe le polynôme :

$$Q=2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X).$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Ecrire la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. f est-il bijectif ?

c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

2) Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(n\in\mathbb{N}^*), A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, on définit l'application trace, notée tr par :

$$\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

a) Montrer que tr est une forme linéaire. Est-elle bijective pour $n\in[\![2,+\infty[\![$?

b) Soient n un entier naturel non nul et $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Vérifier que : $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}({}^tA)$ et montrer que $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$.

En déduire que l'équation $AB-BA=I$ n'admet pas de solution.

3) Soit u un endomorphisme défini sur un espace vectoriel.

a) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N},\ \operatorname{Ker} u^k\subset\operatorname{Ker} u^{k+1}$.

b) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N},\ \operatorname{Im} u^{k+1}\subset\operatorname{Im} u^k$.

Correction

1) a) ❑ On a :

$\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R}x(\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(\lambda P + Q) = 2(\lambda P+Q)(X)+(2-3X)(\lambda P+Q)'(X)+(2X^2-X+1)(\lambda P+Q)''(X)$ soit :

$= 2\lambda P(X)+2Q(X)+(2-3X)(\lambda P'(X)+Q'(X))+(2X^2-X+1)(\lambda P''(X)+Q''(X))$ soit encore :

$=\lambda(2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X))$
$+(2Q(X)+(2-3X)Q'(X)+(2X^2-X+1)Q''(X))$ et donc :

$\forall(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R}x(\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

f est donc une application linéaire.

❑ Soit maintenant $P\in\mathbb{R}_3[X]$. On peut alors écrire : $P'\in\mathbb{R}_2[X]$ et $P''\in\mathbb{R}_1[X]$, d'où :

$(2-3X)P'(X)\in\mathbb{R}_3[X]$ et $(2X^2-X+1)P''(X)\in\mathbb{R}_3[X]$, et donc :

$(2P(X)+(2-3X)P'(X)+(2X^2-X+1)P''(X))\in\mathbb{R}_3[X]$, i.e. : $f(P)\in\mathbb{R}_3[X]$.

f est donc une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

❑ On peut maintenant conclure :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$$

b) On trouve, après calculs :

- $f(1)=2$,
- $f(X)=2-X$,
- $f(X^2)=2X+2$,
- $f(X^3)=5X^3+6X$.

On en déduit alors la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

Comme M comporte une ligne nulle, elle est non inversible, et donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas bijectif}}$$

N.B. : on pouvait également remarquer que M est triangulaire, avec un terme nul sur sa diagonale.