Le pentagone et l'heptadécagone, avec une règle et un compas.

PREMIÈRE PARTIE

1. Donner les solutions de (E) : $z^5 - 1 = 0$, sous forme trigonométrique. [S]
2. Soit Q le polynôme tel que $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$.
   Avec le changement de variable $\omega = z + \dfrac{1}{z}$, exprimer les racines de Q avec des radicaux. [S]
3. En déduire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\sin\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5}$ à l'aide de radicaux. [S]
4. Dans cette question, on se donne deux points O et I distincts du plan.
   On se propose de construire le pentagone régulier (Γ) de centre O et dont un sommet est I, à l'aide uniquement d'une règle et d'un compas.
   Effectuer les constructions suivantes :
   – Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O de rayon OI, recoupant (OI) en I', et le milieu A de $[O, I']$.
   – La perpendiculaire Δ en O à (OI) et une intersection J de Δ et $\mathcal{C}$.
   – Le point B de $[O, I]$ tel que $AB = AJ$.
   – Le cercle centré en B et de rayon OI, qui rencontre $(\mathcal{C})$ en deux points M, N.

   Montrer que M, N sont des sommets de (Γ), et conclure. [S]

DEUXIÈME PARTIE

Dans toute la suite du problème, on pose $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

Tous les calculs demandés doivent être effectués de manière exacte (autrement dit les réponses qui utiliseraient des valeurs approchées fournies par la calculatrice ne sont pas acceptées).

1. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall h \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + 2kh) = \frac{\sin(nh)\cos(a + (n-1)h)}{\sin h}$ [S]
2. On pose $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
   (a) Montrer que $x_1 > 0$. [S]
   (b) Montrer que $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$. [S]
   (c) Développer l'expression $x_1 x_2$, puis linéariser les produits obtenus. [S]
   (d) En déduire que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$. [S]
   (e) Donner une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux. [S]
3. On pose $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta, & y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta, & y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$
   (a) En s'inspirant de la méthode précédente, calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$. [S]
   (b) En déduire des expressions de y_1, y_2, y_3 et de y_4 à l'aide de radicaux. [S]
4. Donner finalement une expression de $\cos\dfrac{\pi}{17}$ et de $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ à l'aide de radicaux. [S]

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie, on voit une construction, toujours à la règle et au compas, de l'heptadécagone, c'est-à-dire du polygone convexe régulier à 17 cotés. Cette construction a été proposée en 1893 par H.W.Richmond.

1. Dans un premier temps, il est nécessaire de faire encore un peu de trigonométrie.

   On conserve ici les notations de la partie II.

   On note φ l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{8}$ tel que $\tan 4\varphi = 4$.

   (a) Montrer que $\cos 4\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $\sin 4\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}$. [S]

   (b) En déduire que $x_1 = \operatorname{cotan} 2\varphi$ et $x_2 = -\tan 2\varphi$. [S]

   (c) Montrer $y_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cotan}\varphi$, $y_2 = -\frac{1}{2}\tan\varphi$, $y_3 = \frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{4}-\varphi)$, $y_3 = -\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{4}+\varphi)$ [S]

   (d) En déduire les égalités $\begin{cases} \cos 6\theta + \cos 10\theta = \frac{1}{2}\tan\varphi \\ \cos 6\theta \ \cos 10\theta = \frac{1}{4}\tan(\varphi - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$ [S]

2. On va maintenant construire l'heptadécagone de centre $O(0,0)$ et de sommet $A(1,0)$.

   On demande d'effectuer, à la règle et au compas, les constructions suivantes :
   - Le cercle (C) de centre 0 de rayon OI, et les points $I'(-1,0)$, $J(0,1)$, $A(0,\frac{1}{4})$.
   - Le point B de $[O,I]$ tel que $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$ (2π).
   - Le point C de $[I',O]$ tel que $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{4}$ (2π).
   - Le cercle de diamètre $[C,I]$ recoupant le segment $[0,J]$ en D.
   - Le cercle de centre B de rayon BD, coupant $[0,I]$ en H_3 et $[I',O]$ en H_5.
   - Les perpendiculaires en H_3, H_5 à (OI) coupant (C) en M_3, M_5 (d'ordonnées positives.)

   Montrer que M_3 et M_5 sont le troisième et le cinquième sommet de l'heptadécagone de centre O dont le sommet d'indice 0 (ou 17) serait le point I (l'heptadécagone étant parcouru dans le sens trigonométrique) et conclure. [S]

Corrigé du problème

PREMIÈRE PARTIE

1. Les solutions sont les racines cinquièmes de l'unité : $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{5}\right)$, $0 \le k \le 4$. [Q]

2. Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$, avec $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

   Pour résoudre $Q(z)$ (sachant que $z = 0$ n'est pas solution), on peut poser $Z = z + \dfrac{1}{z}$.

   On a $Z^2 = z^2 + \dfrac{1}{z^2} + 2$, donc $Q(z) = z^2\left(z^2 + z + 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}\right) = z^2(Z^2 + Z - 1)$.

   Le solutions de $Z^2 + Z - 1 = 0$ sont $Z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

   Il faut ensuite résoudre $z + \dfrac{1}{z} = Z_k$ c'est-à-dire $(E_k) : z^2 - zZ_k + 1 = 0$, pour $k \in \{1, 2\}$.

   Le discriminant de (E_k) s'écrit $\Delta_k = Z_k^2 - 4 = -Z_k - 3$ (en utilisant $Z_k^2 = 1 - Z_k$.)

   On a ainsi $\Delta_1 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\Delta_2 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} < 0$.

   On en déduit que les solutions de (E_k) sont $z_k = \dfrac{Z_k - i\sqrt{-\Delta_k}}{2}$ et $z'_k = \dfrac{Z_k + i\sqrt{-\Delta_k}}{2} = \overline{z_k}$.

   On trouve :

   ◇ $z_1 = \dfrac{Z_1 - i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \dfrac{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{5} - i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

   ◇ $z'_1 = \dfrac{Z_1 + i\sqrt{-\Delta_1}}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{5} + i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \overline{z_1}$

   ◇ $z_2 = \dfrac{Z_2 - i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5} - i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

   ◇ $z'_2 = \dfrac{Z_2 + i\sqrt{-\Delta_2}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5} + i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \overline{z_2}$

   Les racines du polynôme $Q(z)$ sont donc z_1, z'_1, z_2, z'_2.

   Elles sont conjuguées deux à deux, et s'expriment à l'aide de radicaux carrés. [Q]

3. Puisque $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2}$, on a $0 < \cos\dfrac{2\pi}{5} < \cos\dfrac{\pi}{5} < 1$ et $0 < \sin\dfrac{\pi}{5} < \sin\dfrac{2\pi}{5} < 1$.

   D'autre part $\dfrac{4\pi}{5} = \pi - \dfrac{\pi}{5}$, donc $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \sin\dfrac{\pi}{5}$.

   Les solutions de (E) sont : $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \exp\dfrac{2i\pi}{5}$, $\omega_2 = \exp\dfrac{4i\pi}{5}$, $\omega_3 = \overline{\omega_2}$, $\omega_4 = \overline{\omega_1}$.

   ω_1 est la seule solution à avoir une partie réelle et une partie imaginaire positives.

   Ainsi $\omega_1 = z'_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ donc $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

   De même ω_2 est la seule solution de (E) telle que $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ et $\mathrm{Im}\,(z) > 0$.

   Donc $\omega_2 = z'_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ puis $\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

   Finalement $\cos\dfrac{\pi}{5} = -\cos\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. [Q]