Convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions

– Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.
Soit (f_n) une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. Soit g une application de I dans $\mathbb{R}$.

– On dit que la suite (f_n) est *simplement convergente* (CVS) vers g sur I si, pour tout x de I, la suite de terme général $f_n(x)$ converge vers $g(x)$.
On dit alors que l'application $g : I \to \mathbb{R}$ est la *limite simple* de la suite (f_n).
On peut donc écrire : $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.
On notera que l'entier n_0 est a priori fonction à la fois de ε et de x.

– On dit que (f_n) est *uniformément convergente* (CVU) vers g sur I si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - g(x)| = 0$.
On dit que $g : I \to \mathbb{R}$ est la *limite uniforme* de la suite (f_n).
On peut donc écrire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.
On notera que l'entier n_0 est fonction seulement de ε.
Il est clair que si la suite (f_n) est CVU vers g sur I, alors elle est CVS vers g sur I.

– Soit J un sous-intervalle de I. On dit que la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur J si la suite des restrictions des f_n à J est simplement (resp. uniformément) convergente.
On dit que la suite (f_n) est uniformément convergente *sur tout compact* si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Première partie : quelques exemples

1. Etudier la CVS puis la CVU de la suite (f_n) définie sur $I = [0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n$. [S]
2. On considère la suite (f_n) d'applications définies sur $I = \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + x^n)}$.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$. Conclusion ? [S]
3. On considère la suite (f_n) d'applications définies sur $I = \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \cos \dfrac{nx}{n+1}$.
   (a) Montrer que la suite (f_n) est CVS sur $\mathbb{R}$ vers une application g que l'on précisera. [S]
   (b) Montrer que la convergence de la suite (f_n) vers g est uniforme sur tout compact. [S]
   (c) Montrer qu'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}$ (indication : considérer $x_n = (n + 1)\pi$.) [S]
4. Soit (f_n) la suite d'applications définies sur $I = \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^k x^2\, \mathrm{e}^{-nx}$ (k un réel donné.)
   (a) Montrer que la suite (f_n) est CVS sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. [S]
   (b) Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
   En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $k < 2$. [S]
   (c) Montrer que si $k \geq 2$, la suite (f_n) est CVU sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. [S]
5. On définit une suite de polynômes (P_n) par : $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n + \dfrac{1}{2}(x - P_n^2)$.
   (a) Montrer que $P_{n+1} - \sqrt{x} = (P_n - \sqrt{x})\left(1 - \dfrac{P_n + \sqrt{x}}{2}\right)$. [S]
   (b) Exprimer de même $P_{n+1} + \sqrt{x}$ en fonction de $P_n + \sqrt{x}$. [S]
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, 1],\ \sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$. [S]
   (d) Montrer que la suite (P_n) est simplement convergente sur $[0, 1]$ vers $f : x \to \sqrt{x}$. [S]
   (e) Préciser la monotonie des applications $x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et $x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x}$. [S]
   (f) Montrer que la convergence de la suite (P_n) est uniforme sur $[0, 1]$. [S]

Deuxième partie : de la convergence simple à la convergence uniforme.

Plusieurs des exemples vus dans la partie précédente montrent qu'une suite d'applications (f_n) peut converger simplement vers une application g sans pour autant que cette convergence soit uniforme. On va maintenant étudier des situations où la convergence simple implique la convergence uniforme.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, lipschitziennes de même rapport $M \geq 0$.

   On suppose que la suite (f_n) est simplement convergente sur $[a,b]$, vers une application f.

   On va montrer que la convergence est uniforme.

   (a) Dans cette question, on suppose que f est l'application nulle. On se donne $\varepsilon > 0$.

   On introduit une subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_p < x_{p+1}$ de $[a,b]$, de pas inférieur à ε.

   Pour tout x de $[a,b]$, montrer que $|f_n(x)| \leq M\varepsilon + \lambda_n$, avec $\lambda_n = \sup\limits_{0\leq k\leq p} |f_n(x_k)|$.

   En déduire que la suite (f_n) est uniformément convergente. [S]

   (b) Dans le cas général, montrer que f est M-lispchitzienne sur $[a,b]$.

   Considérer alors les applications $g_n = f - f_n$ et conclure. [S]

2. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions polynomiales, toutes de degré inférieur ou égal à m.

   On suppose que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est CVS sur $[a,b]$, avec $a < b$, vers une application f.

   On va montrer que f est un polynôme de degré $\leq m$, et que la convergence est uniforme.

   (a) On se donne $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts dans $[a,b]$.

   Rappeler pourquoi il existe des polynômes L_k de degré m tels que $L_k(\lambda_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases}$

   Justifier $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} P_n(\lambda_k) L_k(x)$ pour tout x de $[a,b]$ et tout n de $\mathbb{N}$.

   En déduire que l'application f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m. [S]

   (b) Justifier l'existence de M dans $\mathbb{R}^+$, tel que : $\forall\, k \in \{0,\ldots,m\},\ \forall\, x \in [a,b],\ |L_k(x)| \leq M$.

   En déduire que sur $[a,b]$ on a $|f(x) - P_n(x)| \leq M \sum\limits_{k=0}^{m} |f(\lambda_k) - P_n(\lambda_k)|$.

   Montrer que la suite (P_n) est CVU sur $[a,b]$. [S]

3. Soit (f_n) une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On suppose que la suite (f_n) est CVS sur $[a,b]$ vers une application continue f.

   On suppose en outre que pour tout x de $[a,b]$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est décroissante.

   On va montrer que la convergence est uniforme (théorème de Dini.)

   (a) On raisonne par l'absurde et on suppose que la suite (f_n) n'est pas CVU sur $[a,b]$ vers f.

   En déduire l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ et d'une suite convergente (x_n) de $[a,b]$, tels que pour tout entier naturel n on ait l'inégalité : $f_n(x_n) - f(x_n) \geq \varepsilon$. [S]

   (b) On note c la limite de la suite de terme général x_n. On se donne $\alpha > 0$.

   Justifier l'existence de p dans $\mathbb{N}$ tel que $|f(c) - f_p(c)| \leq \alpha$.

   En utilisant la continuité de f et f_p en c, prouver alors l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout x de $[a,b]$ et tout $n \geq p$: $|x - c| \leq \eta \Rightarrow 0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_p(x) - f(x) \leq 3\alpha$. [S]

   (c) En revenant à la suite (x_n), aboutir à une contradiction et conclure. [S]

   (d) Indiquer comment ce résultat permet de simplifier la fin de la question I.5. [S]