Deux études de familles de fonctions

Problème 1

Pour tout réel λ, on note f_λ l'application définie par $f_\lambda(x) = \dfrac{4x}{\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|}$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de f_λ.
   Placer soigneusement, les uns par rapport aux autres, les réels de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_\lambda$. [S]

   (b) Montrer qu'on peut prolonger f_λ par continuité aux points 0 et 4.
   Dans la suite, on supposera que f_λ est ainsi prolongée. [S]

2. (a) Étudier la dérivabilité de f_λ en 0 et en 4 (on donnera l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.) [S]

   (b) Étudier les asymptotes verticales de la courbe $\mathcal{C}_\lambda$. [S]

   (c) Étudier l'application f_λ au voisinage de $\pm\infty$. On vérifiera notamment que $\mathcal{C}_\lambda$ est asymptote à une parabole quand $\lambda = 0$, et à une droite quand $\lambda \neq 0$. On précisera l'équation de l'asymptote et le placement de la courbe par rapport à celle-ci. [S]

3. (a) Etudier les variations de l'application g_λ définie par $4g_\lambda(x) = \left(\lambda + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)^2 f'_\lambda(x)$. [S]

   (b) En discutant suivant λ, déterminer le signe de f'_λ par intervalles.
   En déduire les tableaux de variation de f_λ dans les cas suivants :
   $\lambda > 2$, $\lambda = 2$, $0 < \lambda < 2$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$. [S]

   (c) Construire les courbes pour $\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$. [S]

Problème 2

Pour tout réel λ, on définit l'application f_λ par $f_\lambda(x) = (x-\lambda)^x$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de f_λ, ainsi que la limite $\ell_\lambda = \lim\limits_{x\to\lambda^+} f_\lambda(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. [S]
2. Quand ℓ_λ est finie, étudier l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$ au voisinage de (λ, ℓ_λ). [S]
3. On note u_λ l'application définie sur $\mathcal{D}_\lambda$ par $f'_\lambda(x) = u_\lambda(x) f_\lambda(x)$.

   (a) Si $\lambda < 0$, montrer que u_λ ne s'annule qu'une seule fois.
   En déduire le tableau des variations de f_λ dans ce cas. [S]

   (b) Etudier les variations de f_λ quand $\lambda = 0$. [S]

4. (a) Etudier les variations de u_λ quand $\lambda > 0$. En déduire que :
   – Si $\lambda > \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x) > 0$ pour tout x de $\mathcal{D}_\lambda$.
   – Si $\lambda = \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x) \geq 0$ sur $\mathcal{D}_\lambda$ et ne s'annule qu'en un seul point.
   – Si $0 < \lambda < \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x)$ s'annule en μ_1, μ_2, avec $\lambda < \mu_1 < 2\lambda < \mu_2$. [S]

   (b) En déduire les différents tableaux de variations possibles pour f_λ quand $\lambda > 0$. [S]

5. Étudier le placement respectif des courbes $y = f_{\lambda_1}(x)$ et $y = f_{\lambda_2}(x)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. [S]
6. Construire sur un même graphique les représentations graphiques des applications f_λ pour chacun des cas rencontrés dans ce problème. [S]

Corrigé du problème

Problème 1

1. (a) L'ensemble $\mathcal{D}_\lambda$ est $\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$ privé des solutions de l'équation (E) : $\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|+\lambda=0$.

   Or $(E)\Leftrightarrow\left|\dfrac{x-4}{x}\right|=\mathrm{e}^\lambda\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{x}=\varepsilon\,\mathrm{e}^\lambda\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{1-\varepsilon\,\mathrm{e}^\lambda}$, avec $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

   On en déduit : $\mathcal{D}_\lambda=\mathbb{R}\setminus\{0,4,a_\lambda,b_\lambda\}$, en notant $a_\lambda=\dfrac{4}{1-\mathrm{e}^\lambda}$ et $b_\lambda=\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^\lambda}$.

   On doit maintenant placer a_λ et b_λ par rapport à 0 et 4.

   – Si $\lambda=0$, alors a_λ n'est pas défini et $b_\lambda=2$. Dans ce cas $\mathcal{D}_\lambda=\mathbb{R}\setminus\{0,2,4\}$.

   – Si $\lambda\neq 0$, alors $0,4,a_\lambda,b_\lambda$ sont deux à deux distincts.

   Si $\lambda<0$, on a $0<b_\lambda<4<a_\lambda$; si $\lambda>0$, et $a_\lambda<0<b_\lambda<4$. [Q]

   (b) On a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lambda+\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-}f_\lambda(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f_\lambda(x)=0^-$.

   De même, $\lim\limits_{x\to 4}\left(\lambda+\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 4}f_\lambda(x)=0^+$.

   On peut ainsi prolonger f_λ par continuité en posant $f_\lambda(0)=f_\lambda(4)=0$. [Q]

2. (a) On a $\dfrac{f_\lambda(x)}{x}=\dfrac{4}{\lambda+\ln|x|-\ln|x-4|}\underset{0}{\sim}\dfrac{4}{\ln|x|}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_\lambda(x)}{x}=0^-$.

   On en déduit que f_λ est dérivable en 0, avec $f'_\lambda(0)=0$.

   La courbe $y=f_\lambda(x)$ présente donc une tangente horizontale à l'origine.

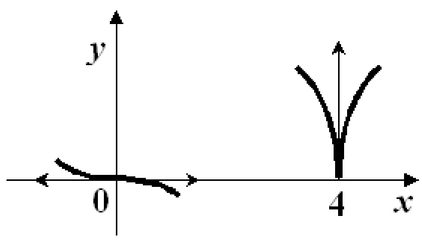
   En fait c'est une tangente d'inflexion car $\lim\limits_{x\to 0^-}f_\lambda(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}f_\lambda(x)=0^-$.

   On a $\dfrac{f_\lambda(x)}{x-4}=\dfrac{4x}{(\lambda+\ln|x|-\ln|x-4|)(x-4)}\underset{4}{\sim}\dfrac{16}{(4-x)\ln|x-4|}$

   On en déduit $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f_\lambda(x)}{x-4}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f_\lambda(x)}{x-4}=+\infty$.

   On en déduit que f_λ n'est pas dérivable en $x=4$.

   Plus précisément, la courbe $y=f_\lambda(x)$ présente au point $(4,0)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut. Voici l'allure de la courbe au voisinage des points d'abscisses 0 et 4.

   [Q]

   (b) Il n'y a d'asymptote verticale que lorsque x tend vers a_λ ou vers b_λ.

   Notons $d_\lambda(x)=\lambda+\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|$. On a $d'_\lambda(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x(4-x)}$.

   d_λ est donc décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]4,+\infty[$, et croissante sur $]0,4[$.

   Or d_λ s'annule en a_λ et en b_λ. On en déduit les résultats suivants :

   – Si $\lambda<0$, on a $0<b_\lambda<4<a_\lambda$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to b_\lambda^-}d_\lambda(x)=0^-$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^+}d_\lambda(x)=0^+$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^-}d_\lambda(x)=0^+$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^+}d_\lambda(x)=0^-$.

   Ainsi $\lim\limits_{x\to b_\lambda^-}f_\lambda(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to b_\lambda^+}f_\lambda(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^-}f_\lambda=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a_\lambda^+}f_\lambda(x)=-\infty$.

– Si $\lambda > 0$, on a $a_\lambda < 0 < b_\lambda < 4$ (attention au signe de a_λ...)

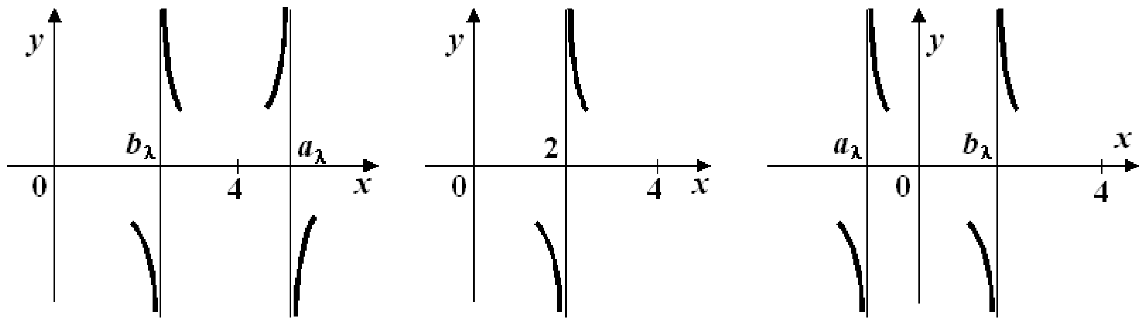
Ainsi $\lim\limits_{x \to a_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^+$, $\lim\limits_{x \to a_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to b_\lambda^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to b_\lambda^+} d_\lambda(x) = 0^+$.

Donc $\lim\limits_{x \to a_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b_\lambda^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to b_\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty$.

– Si $\lambda = 0$, on a $0 < b_\lambda = 2 < 4$, et a_λ n'est pas défini.

Donc $\lim\limits_{x \to 2^-} d_\lambda(x) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to 2^+} d_\lambda(x) = 0^+$ puis $\lim\limits_{x \to 2^-} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f_\lambda(x) = +\infty$

On voit maintenant l'allure des asymptotes verticales, dans les différents cas.



$\boxed{\lambda < 0}$ $\boxed{\lambda = 0}$ $\boxed{\lambda > 0}$

[Q]

(c) • *On commence par traiter le cas $\lambda = 0$.*

D'après l'énoncé, il faut arriver à $f_\lambda(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$.

Il est plus simple de développer en 0. On pose $x = \dfrac{1}{X}$ et on trouve :

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{4x}{\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|} = \frac{-4}{X\ln(1-4X)} = \frac{4}{X\Big(4X + 8X^2 + \frac{64}{3}X^3 + 64X^4 + \mathrm{o}(X^4)\Big)} \\
&= \frac{1}{X^2}\Big(1 + 2X + \tfrac{16}{3}X^2 + 16X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big)^{-1} \\
&= \frac{1}{X^2}\Big[1 - \Big(2X + \tfrac{16}{3}X^2 + 16X^3\Big) + \Big(4X^2 + \tfrac{64}{3}X^3\Big) - \Big(8X^3\Big) + \mathrm{o}(X^3)\Big] \\
&= \frac{1}{X^2}\Big(1 - 2X - \tfrac{4}{3}X^2 - \tfrac{8}{3}X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big) \\
&= \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} - \frac{4}{3} - \frac{8X}{3} + \mathrm{o}(X)
\end{aligned}$$

On obtient $f_0(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3x} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ en revenant à la variable x.

Ainsi $\mathcal{C}_0$ est asymptote à la parabole $\mathcal{P}$: $y(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{3}$ quand $x \to \pm\infty$.

Le placement est donné par le signe de la quantité $f_0(x) - y(x) \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{8}{3x}$.

Ainsi $\mathcal{C}_0$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ quand $x \to -\infty$ et en-dessous quand $x \to +\infty$.

Plus modestement, on a $f_0(x) \sim x^2$ au voisinage de $\pm\infty$, donc $\lim\limits_{x \to \infty} = +\infty$.

La branche infinie est bien sûr une "branche parabolique" de direction Oy.

- *On va maintenant traiter le cas général* $\lambda \neq 0$. On pose toujours $X = 1/x$.

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \frac{4}{X(\alpha - \ln(1-4X))} = \frac{4}{\alpha X\Big(1 + \frac{4}{\alpha}X + \frac{8}{\alpha}X^2 + \frac{64}{3\alpha}X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big)}\\
&= \frac{4}{\alpha X}\Big[1 - \Big(\tfrac{4}{\alpha}X + \tfrac{8}{\alpha}X^2 + \tfrac{64}{3\alpha}X^3\Big) + \Big(\tfrac{16}{\alpha^2}X^2 + \tfrac{64}{\alpha^2}X^3\Big) - \tfrac{64}{\alpha^3}X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big]\\
&= \frac{4}{\alpha X}\Big[1 - \frac{4}{\alpha}X + \frac{8(2-\alpha)}{\alpha^2}X^2 - \frac{64(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^3}X^3 + \mathrm{o}(X^3)\Big]
\end{aligned}$$

Ainsi : $f_\lambda(x) = \dfrac{4}{\alpha}x - \dfrac{16}{\alpha^2} + \dfrac{32(2-\alpha)}{\alpha^3}\dfrac{1}{x} - \dfrac{256(\alpha^2 - 3\alpha + 3)}{3\alpha^4}\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$

Cela traduit l'existence de l'asymptote oblique $y = \dfrac{4}{\alpha}x - \dfrac{16}{\alpha^2}$ quand $x \to \pm\infty$.

– Si $\alpha = 2$, on a $f_2(x) = 2x - 4 - \dfrac{16}{x^2} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$.
  Dans ce cas, la courbe est en-dessous de son asymptote quand $x \to \pm\infty$.

– Si $\alpha \neq 2$, le placement est donné par le signe de $\dfrac{2-\alpha}{\alpha\, x}$.
  Si $\alpha < 0$ ou $\alpha > 2$, la courbe est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et en-dessous au voisinage de $+\infty$.
  Si $0 < \alpha < 2$, la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et au-dessus au voisinage de $+\infty$.

S'il n'y avait pas eu le cas particulier $\alpha = 2$, on aurait pu se contenter de pousser le développement généralisé de $f_\lambda(x)$ à l'ordre immédiatement inférieur. [Q]

3. (a) On trouve $g_\lambda(x) = \lambda + \ln\Big|\dfrac{x}{x-4}\Big| - x\Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4}\Big) = \ln\Big|\dfrac{x}{x-4}\Big| + \lambda + \dfrac{4}{x-4}$.

L'application g_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

On observe que $\lim\limits_{x\to\infty} g_\lambda(x) = \lambda$ et que $\lim\limits_{x\to 0} g_\lambda(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)\ln|x-4| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}(x-4)g_\lambda(x) = 4 \Rightarrow g_\lambda(x) \underset{4}{\sim} \dfrac{4}{x-4}$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to 4^-} g_\lambda(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+} g_\lambda(x) = +\infty$.

Enfin, pour $x \notin \{0, 4\}$, on trouve : $g'_\lambda(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{4}{(x-4)^2} = \dfrac{8(2-x)}{x(x-4)^2}$.

On constate que $g_\lambda(2) = \lambda - 2$.

Voici le tableau des variations de g_λ.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
g'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g	λ	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	λ-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	λ

$f'_\lambda(x)$ a le signe de $g_\lambda(x)$ sur $\mathcal{D}_\lambda$.

On voit que le nombre de solutions de $g_\lambda(x) = 0$ dépend du placement de λ par rapport à 0 et à 2.

On remarque qu'aux points $x \in \{a_\lambda, b_\lambda\}$, on a $g_\lambda(x) = \dfrac{4}{x-4} \neq 0$.

Autrement dit, les points éventuels où g_λ s'annule sont distincts de a_λ et de b_λ. [Q]