

## Sur les traces de Leonardo Pisano

On définit la *suite de Fibonacci*  $(F_n)_{n \geq 0}$  par :  $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$  et  $\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

On a donc  $F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$ , etc.

On définit ainsi une suite d'entiers naturels, strictement croissante à partir du rang 2.

Leonardo Pisano, dit Fibonacci (1170-1250) : par son oeuvre principale, le « liber abaci », il a introduit et popularisé la numérotation positionnelle utilisant les chiffres arabes. Les entiers  $F_n$  y apparaissent dans un problème relatif à la descendance d'un couple de lapins. C'est le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) qui baptisa cette suite et en découvrit d'intéressantes propriétés.

### Première partie

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de divisibilité portant sur les entiers  $F_n$ .

1. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , prouver la relation de Cassini :  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .  
En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les entiers  $F_{n-1}$  et  $F_n$  sont premiers entre eux.  
Jean-Baptiste Cassini (1625-1712), astronome à qui on doit la découverte des satellites de Jupiter. [S]

2. Pouvez-vous expliquer le paradoxe suivant, attribué à Lewis Carrol ?

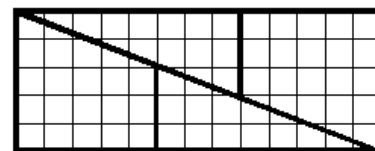
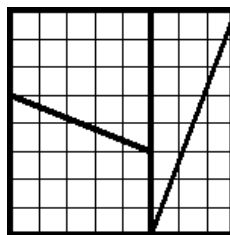
On découpe un carré  $8 \times 8$  comme indiqué en deux triangles et deux trapèzes.

On réarrange les quatre morceaux en un seul rectangle de taille  $5 \times 13$ .

Avant découpe, l'aire totale vaut 64.

Après réarrangement elle vaut 65.

D'où vient le carré supplémentaire ?



Généraliser très soigneusement en utilisant les entiers  $F_n$ .

Lewis Carrol, 1832-1898, logicien et écrivain britannique. Auteur de « Alice au Pays des Merveilles ». [S]

3. Montrer que pour tout  $(n, m)$  de  $\mathbb{N}^2$ , on a  $F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$ . [S]
4. En déduire que pour tout  $(q, n)$  de  $\mathbb{N}^2$ ,  $F_{qn}$  est un multiple de  $F_n$ . [S]
5. On se donne  $(m, n)$  dans  $\mathbb{N}^2$ , avec  $m \leq n$ . Soit  $d$  un entier naturel.  
Montrer que si  $d$  divise  $F_n$  et  $F_m$ , alors il divise  $F_{n-m}$  (utiliser les questions 1 et 3.) [S]
6. En déduire que pour tous entiers  $m$  et  $n$  on a :  $F_m \wedge F_n = F_{m \wedge n}$ .  
Indication : on sera amené à démontrer que si  $p$  divise  $F_m$  et  $F_n$ , alors il divise  $F_{m \wedge n}$ .  
Pour cela, on raisonnera par récurrence sur la valeur de  $m+n$ , et on utilisera la question 5. [S]
7. Montrer qu'on peut maintenant compléter le résultat de la question 4 de la façon suivante :  
Pour tout entier  $n \geq 3$ , et pour tout entier  $m$ , on a l'équivalence :  $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$ . [S]
8. Dans cette question on va prouver le lemme de Yuri Matijasevitch (1970) :  
« Pour  $n \geq 3$  et  $m \geq 0$  :  $F_m$  est divisible par  $F_n^2$  si et seulement si  $m$  est divisible par  $nF_n$  »  
(a) Par récurrence sur  $k$ , montrer les congruences  $\begin{cases} F_{kn} \equiv kF_n F_{n+1}^{k-1} \pmod{F_n^2} \\ F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \pmod{F_n^2} \end{cases}$  [S]  
(b) Conclure [S]

## Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des problèmes relatifs à des sommes d'entiers  $F_n$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n$ , on a l'égalité  $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$ . [S]
2. Montrer  $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$ , pour tout  $n \geq 0$ . [S]
3. On note  $\Phi$  la solution positive de  $x^2 = x + 1$ . Donc  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (c'est le *nombre d'or*).  
On note  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k x^k$  pour tout réel  $x$  et tout entier  $n$ .
  - (a) Montrer que pour tout entier  $n$ , on a l'encadrement  $0 \leq F_n \leq \Phi^n$ . [S]
  - (b) En déduire que la suite  $n \mapsto S_n(x)$  est convergente pour tout  $x$  de  $I = ]-1/\Phi, 1/\Phi[$ . [S]
  - (c) Pour  $x \in I$ , on note  $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ . Prouver :  $S(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$  [S]
  - (d) Calculer  $y = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 + 0.0000013 + 0.00000021 + \dots$  [S]
4. On va établir que tout entier s'écrit de façon unique comme somme d'entiers  $F_n$  non consécutifs (C'est le *Théorème de Zeckendorf* (1972).) On notera  $n \gg m$  pour exprimer que  $n \geq m + 2$ .
  - (a) Montrer que  $F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \dots = F_{n+1} - \varepsilon$ , où  $\varepsilon = 1$  si  $n$  est pair, et  $\varepsilon = 0$  sinon. [S]
  - (b) Soit  $n$  un entier naturel strictement positif.  
On suppose qu'il existe  $k_0 \gg k_1 \gg \dots \gg k_p \gg 0$  ( $p \geq 0$ ) tels que  $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \dots + F_{k_p}$ .  
Montrer que  $k_0$  est nécessairement l'entier  $k$  maximum tel que  $F_k \leq n$ . [S]
  - (c) Soit  $n$  un entier naturel strictement positif. Montrer qu'il existe une unique décomposition de  $n$  sous la forme  $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \dots + F_{k_p}$ , avec  $p \geq 0$  et  $k_0 \gg k_1 \gg \dots \gg k_p \gg 0$ . [S]
  - (d) Former la décomposition de  $n = 2002$ . [S]
5. Dans cette question, on cherchera le rapport avec les nombres de Fibonacci.
  - (a) De combien de façons différentes peut-on daller une allée  $2 \times n$  avec des dalles  $2 \times 1$ ? [S]
  - (b) Épatez vos amis, brillez en société! Vous distribuez dans l'assistance 8 cartes numérotées contenant chacune des entiers de 1 à 54.  
Carte n°1 : 1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53  
Carte n°2 : 2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54  
Carte n°3 : 3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51  
Carte n°4 : 5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41, 52, 53, 54  
Carte n°5 : 8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43, 44, 45, 46  
Carte n°6 : 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54  
Carte n°7 : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33  
Carte n°8 : 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54  
Vous demandez à une personne de l'assistance de choisir un entier au hasard, de 1 à 54.  
Vous lui demandez ensuite sur quelles cartes apparaît le numéro qu'elle a choisi.  
Sous les applaudissements, vous devinez le numéro mystérieux. Comment faites-vous? [S]
  - (c) Deux joueurs participent au jeu suivant. Au départ, on dispose d'un tas de  $n \geq 1$  haricots. Le premier en retire  $m$  ( $1 \leq m < n$ ). Le second en retire au moins un mais au plus  $2m$ . Plus généralement, chaque joueur doit retirer un nombre de haricots au moins égal à 1 et au plus égal au double du nombre de haricots que vient de retirer l'autre joueur. Le joueur qui retire le dernier haricot gagne la partie. Y-a-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur? [S]

## Corrigé du problème

### Première partie

- Pour tout  $n \geq 1$ , posons  $u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ . Tout d'abord  $u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1$ .

Pour  $n \geq 1$  :  $u_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est donc géométrique de premier terme  $u_1 = -1$  et de raison  $-1$ .

Il en découle  $u_n = (-1)^n$  pour tout  $n \geq 1$ , c'est-à-dire  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , la relation précédente est une identité de Bezout entre  $F_{n-1}$  et  $F_n$ .

Il en découle que  $F_{n-1}$  et  $F_n$  sont premiers entre eux, pour tout  $n \geq 1$ . [Q]
- On nomme les points  $O, A, B, C, D$  comme indiqué. On se place dans le repère  $O, x, y$ .

On a les coordonnées  $A(0, 5)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(8, 2)$  et  $D(13, 0)$ .

Le coefficient directeur de  $(AB)$  est égal à  $-\frac{2}{5}$ .

Ceux de  $(AC)$  et  $(AD)$  valent respectivement  $-\frac{3}{8}$  et  $-\frac{5}{13}$ .

Ces trois coefficients sont différents.

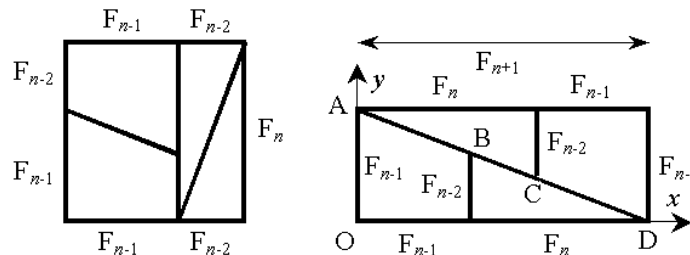
Les droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(AD)$  sont donc distinctes.

Les coefficients des droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(AD)$  valent  $\beta = -\frac{208}{520}$ ,  $\gamma = -\frac{195}{520}$  et  $\delta = -\frac{200}{520}$ .

Puisque  $\beta < \delta < \gamma$ , le point  $B$  est en-dessous de la droite  $(AD)$  et  $C$  est au-dessus.

On voit que les trois coefficients sont suffisamment proches pour expliquer l'illusion d'optique.

On peut généraliser en partant d'un carré d'arête  $F_n$  :



Avant découpe la surface est  $S = F_n^2$ . Après, elle vaut  $F_{n-1}F_{n+1} = S + (-1)^n$ .

On a ici les coordonnées  $A(0, F_{n-1})$ ,  $B(F_{n-1}, F_{n-2})$ ,  $C(F_n, F_{n-3})$  et  $D(F_{n+1}, 0)$ .

Les pentes des droites  $(AB)$ ,  $(AC)$  et  $(AD)$  valent  $\beta = -\frac{F_{n-3}}{F_{n-1}}$ ,  $\gamma = -\frac{F_{n-2}}{F_n}$  et  $\delta = -\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ .

On trouve par exemple :

$$\begin{aligned} \delta - \beta &= \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-3}F_{n+1} - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(F_{n-1} - F_{n-2})(F_n + F_{n-1}) - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} \\ &= \frac{F_{n-1}(F_n - F_{n-2}) - F_n F_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta - \gamma &= \frac{F_{n-2}}{F_n} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-2}F_{n+1} - F_n F_{n-1}}{F_n F_{n+1}} \\ &= \frac{(F_n - F_{n-1})F_{n+1} - F_n(F_{n+1} - F_n)}{F_n F_{n+1}} = \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_n F_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi  $\beta < \delta < \gamma$  si  $n$  est pair, et  $\beta > \delta > \gamma$  si  $n$  est impair.

Dans tous les cas, les points  $B$  et  $C$  sont de part et d'autre de la droite  $(AD)$ . En tout cas  $B$  et  $C$  ne sont jamais alignés avec  $A$  et  $D$ . L'illusion d'optique est d'autant plus frappante que les différences entre les taux d'accroissement tendent rapidement vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . [Q]

3. On raisonne par récurrence de pas deux sur  $n$ , en fixant la valeur de  $m$ .

La propriété est vraie si  $n = 0$  car  $F_{m+1}F_1 + F_mF_0 = F_{m+1}$ .

Elle est vraie si  $n = 1$  car  $F_{m+1}F_2 + F_mF_1 = F_{m+1} + F_m = F_{m+2}$ .

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que la propriété est vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

Cela signifie que pour tout  $m$  de  $\mathbb{N}$ , 
$$\begin{cases} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1} \\ F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1} = F_{n+m+2} \end{cases}$$

En additionnant, on trouve :  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $F_{m+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) + F_m(F_n + F_{n+1}) = F_{n+m+1} + F_{n+m+2}$

C'est-à-dire :  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $F_{m+1}F_{n+3} + F_mF_{n+2} = F_{n+m+3}$  ce qui prouve la propriété au rang  $n + 2$ .

Ceci achève la récurrence :  $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ ,  $F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1}$ . [Q]

4. On remarque que la propriété est évidente si  $n = 0$ .

On fixe  $n$  (quelconque dans  $\mathbb{N}^*$ ) et on procède par récurrence sur  $q$ .

La propriété est vraie de façon évidente si  $q = 0$  et  $q = 1$ .

On se donne donc un entier  $q \geq 1$  et on suppose qu'il existe un entier  $k$  tel que  $F_{qn} = kF_n$ .

Dans le résultat de la question précédente, on choisit  $m = nq - 1$  (il est dans  $\mathbb{N}$ .)

On trouve  $F_{(q+1)n} = F_{qn}F_{n+1} + F_{qn-1}F_n = (kF_{n+1} + F_{qn-1})F_n$  qui est un multiple de  $F_n$ .

Ceci achève la récurrence. Ainsi, pour tout  $(q, n)$  de  $\mathbb{N}^2$ ,  $F_{qn}$  est multiple de  $F_n$ . [Q]

5. Dans le résultat de la question (3), on remplace  $n$  par  $n - m - 1$ .

On obtient  $F_{m+1}F_{n-m} + F_mF_{n-m-1} = F_n$ .

Puisque  $d$  divise  $F_m$  et  $F_n$ , il divise  $F_{m+1}F_{n-m} = F_n - F_{n-m}F_m$ .

On sait depuis (1) que  $F_m \wedge F_{m+1} = 1$ . Or  $d$  divise  $F_m$ . Il en découle  $d \wedge F_{m+1} = 1$ .

Ainsi  $d$  divise  $F_{m+1}F_{n-m}$  et  $d \wedge F_{m+1} = 1$ . Le théorème de Gauss implique  $d \mid F_{n-m}$ . [Q]

6. Puisque  $m \wedge n$  divise  $m$  et  $n$ , il en découle que  $F_{m \wedge n}$  divise  $F_m$  et  $F_n$  (cf question 4.)

Autrement dit,  $F_{m \wedge n}$  divise le pgcd de  $F_m$  et de  $F_n$ .

Réciproquement, on va montrer que si  $p \mid F_m$  et  $p \mid F_n$  alors  $p \mid F_{m \wedge n}$ .

Le résultat est évident si  $m = 0$  ou  $n = 0$ . On va donc supposer  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$ .

On va raisonner par récurrence forte sur la valeur de la somme  $s = m + n$ .

Si  $s = 2$ , c'est-à-dire si  $m = n = 1$  le résultat est évident car alors  $F_m = F_n = F_{m \wedge n} = F_1 = 1$ .

On se donne maintenant  $m, n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , de somme  $s = m + n \geq 3$ .

On suppose que la propriété est vraie pour tous les  $m', n'$  de  $\mathbb{N}^*$  tels que  $s' = m' + n' < s$ .

Si  $m = n$ , l'implication  $(p \mid F_m, p \mid F_n) \Rightarrow p \mid F_{m \wedge n}$  est évidente.

On peut donc supposer par exemple  $1 \leq m < n$ .

Puisque  $p$  divise  $F_m$  et  $F_m$ , il divise  $F_{n-m}$  (cf question 5.)