Sur les traces de Leonardo Pisano

On définit la *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\ge 0}$ par : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ et $\forall\, n \ge 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On a donc $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, etc.
On définit ainsi une suite d'entiers naturels, strictement croissante à partir du rang 2.

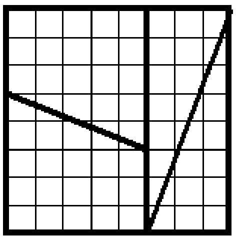
Leonardo Pisano, dit Fibonacci (1170-1250) : par son oeuvre principale, le « liber abaci », il a introduit et popularisé la numérotation positionnelle utilisant les chiffres arabes. Les entiers F_n y apparaissent dans un problème relatif à la descendance d'un couple de lapins. C'est le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) qui baptisa cette suite et en découvrit d'intéressantes propriétés.

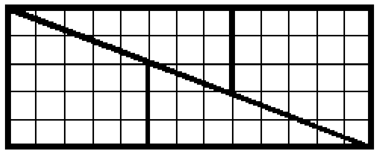
Première partie

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de divisibilité portant sur les entiers F_n.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, prouver la relation de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les entiers F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.
   Jean-Baptiste Cassini (1625-1712), astronome à qui on doit la découverte des satellites de Jupiter. [S]

2. Pouvez-vous expliquer le paradoxe suivant, attribué à Lewis Carrol ?
   On découpe un carré 8×8 comme indiqué en deux triangles et deux trapèzes.
   On réarrange les quatre morceaux en un seul rectangle de taille 5×13.
   Avant découpe, l'aire totale vaut 64.
   Après réarrangement elle vaut 65.
   D'où vient le carré supplémentaire ?

   Généraliser très soigneusement en utilisant les entiers F_n.
   Lewis Carrol, 1832-1898, logicien et écrivain britannique. Auteur de « Alice au Pays des Merveilles ». [S]

3. Montrer que pour tout (n, m) de $\mathbb{N}^2$, on a $F_{n+m+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$. [S]

4. En déduire que pour tout (q, n) de $\mathbb{N}^2$, F_{qn} est un multiple de F_n. [S]

5. On se donne (m, n) dans $\mathbb{N}^2$, avec $m \le n$. Soit d un entier naturel.
   Montrer que si d divise F_n et F_m, alors il divise F_{n-m} (utiliser les questions 1 et 3.) [S]

6. En déduire que pour tous entiers m et n on a : $F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}$.
   Indication : on sera amené à démontrer que si p divise F_m et F_n, alors il divise $F_{m\wedge n}$.
   Pour cela, on raisonnera par récurrence sur la valeur de $m+n$, et on utilisera la question 5. [S]

7. Montrer qu'on peut maintenant compléter le résultat de la question 4 de la façon suivante :
   Pour tout entier $n \ge 3$, et pour tout entier m, on a l'équivalence : $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$. [S]

8. Dans cette question on va prouver le lemme de Yuri Matijasevitch (1970) :
   « Pour $n \ge 3$ et $m \ge 0$: F_m est divisible par F_n^2 si et seulement si m est divisible par nF_n »
   (a) Par récurrence sur k, montrer les congruences $\begin{cases} F_{kn} \equiv kF_nF_{n+1}^{k-1} & (F_n^2) \\ F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k & (F_n^2) \end{cases}$ [S]
   (b) Conclure [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des problèmes relatifs à des sommes d'entiers F_n.

1. Montrer que pour tout entier n, on a l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$. [S]
2. Montrer $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. [S]
3. On note Φ la solution positive de $x^2 = x + 1$. Donc $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*).
   On note $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_k x^k$ pour tout réel x et tout entier n.
   (a) Montrer que pour tout entier n, on a l'encadrement $0 \leq F_n \leq \Phi^n$. [S]
   (b) En déduire que la suite $n \mapsto S_n(x)$ est convergente pour tout x de $I =]-1/\Phi, 1/\Phi[$. [S]
   (c) Pour $x \in I$, on note $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} F_k x^k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. Prouver : $S(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ [S]
   (d) Calculer $y = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 + 0.0000013 + 0.00000021 + \cdots$ [S]
4. On va établir que tout entier s'écrit de façon unique comme somme d'entiers F_n non consécutifs (C'est le *Théorème de Zeckendorf* (1972).) On notera $n \gg m$ pour exprimer que $n \geq m+2$.
   (a) Montrer que $F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \cdots = F_{n+1} - \varepsilon$, où $\varepsilon = 1$ si n est pair, et $\varepsilon = 0$ sinon. [S]
   (b) Soit n un entier naturel strictement positif.
   On suppose qu'il existe $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ ($p \geq 0$) tels que $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$.
   Montrer que k_0 est nécessairement l'entier k maximum tel que $F_k \leq n$. [S]
   (c) Soit n un entier naturel strictement positif. Montrer qu'il existe une unique décomposition de n sous la forme $n = F_{k_0} + F_{k_1} + \cdots + F_{k_p}$, avec $p \geq 0$ et $k_0 \gg k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$. [S]
   (d) Former la décomposition de $n = 2002$. [S]
5. Dans cette question, on cherchera le rapport avec les nombres de Fibonacci.
   (a) De combien de façons différentes peut-on daller une allée $2 \times n$ avec des dalles 2×1 ? [S]
   (b) Épatez vos amis, brillez en société ! Vous distribuez dans l'assistance 8 cartes numérotées contenant chacune des entiers de 1 à 54.
   Carte n°1 : $1, 4, 6, 9, 12, 14, 17, 19, 22, 25, 27, 30, 33, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 53$
   Carte n°2 : $2, 7, 10, 15, 20, 23, 28, 31, 36, 41, 44, 49, 54$
   Carte n°3 : $3, 4, 11, 12, 16, 17, 24, 25, 32, 33, 37, 38, 45, 46, 50, 51$
   Carte n°4 : $5, 6, 7, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 39, 40, 41, 52, 53, 54$
   Carte n°5 : $8, 9, 10, 11, 12, 29, 30, 31, 32, 33, 42, 43, 44, 45, 46$
   Carte n°6 : $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54$
   Carte n°7 : $21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33$
   Carte n°8 : $34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54$
   Vous demandez à une personne de l'assistance de choisir un entier au hasard, de 1 à 54.
   Vous lui demandez ensuite sur quelles cartes apparaît le numéro qu'elle a choisi.
   Sous les applaudissements, vous devinez le numéro mystérieux. Comment faites-vous ? [S]
   (c) Deux joueurs participent au jeu suivant. Au départ, on dispose d'un tas de $n \geq 1$ haricots.
   Le premier en retire m ($1 \leq m < n$.) Le second en retire au moins un mais au plus $2m$.
   Plus généralement, chaque joueur doit retirer un nombre de haricots au moins égal à 1 et au plus égal au double du nombre de haricots que vient de retirer l'autre joueur.
   Le joueur qui retire le dernier haricot gagne la partie.
   Y-a-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. Tout d'abord $u_1 = F_2F_0 - F_1^2 = -1$.

   Pour $n \geq 1 : u_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1}+F_n)F_n - F_{n+1}(F_n+F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -u_n$.

   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de premier terme $u_1 = -1$ et de raison -1.

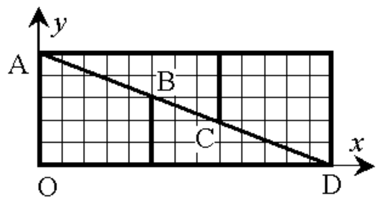
   Il en découle $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

   Pour tout $n \geq 1$, la relation précédente est une identité de Bezout entre F_{n-1} et F_n.

   Il en découle que F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux, pour tout $n \geq 1$. [Q]

2. On nomme les points O, A, B, C, D comme indiqué. On se place dans le repère O, x, y.

   On a les coordonnées $A(0,5)$, $B(5,3)$, $C(8,2)$ et $D(13,0)$.
   Le coefficient directeur de (AB) est égal à $-\frac{2}{5}$.
   Ceux de (AC) et (AD) valent respectivement $-\frac{3}{8}$ et $-\frac{5}{13}$
   Ces trois coefficients sont différents.
   Les droites (AB), (AC) et (AD) sont donc distinctes.

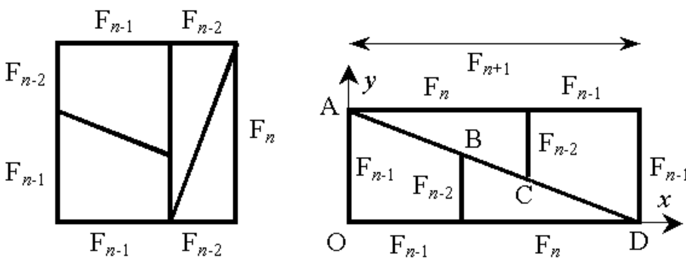
   

   Les coefficients des droites (AB), (AC) et (AD) valent $\beta = -\frac{208}{520}$, $\gamma = -\frac{195}{520}$ et $\delta = -\frac{200}{520}$.

   Puisque $\beta < \delta < \gamma$, le point B est en-dessous de la droite (AD) et C est au-dessus.

   On voit que les trois coefficients sont suffisamment proches pour expliquer l'illusion d'optique.

   On peut généraliser en partant d'un carré d'arête F_n :

   Avant découpe la surface est $S = F_n^2$. Après, elle vaut $F_{n-1}F_{n+1} = S + (-1)^n$.

   On a ici les coordonnées $A(0, F_{n-1})$, $B(F_{n-1}, F_{n-2})$, $C(F_n, F_{n-3})$ et $D(F_{n+1}, 0)$.

   Les pentes des droites (AB), (AC) et (AD) valent $\beta = -\dfrac{F_{n-3}}{F_{n-1}}$, $\gamma = -\dfrac{F_{n-2}}{F_n}$ et $\delta = -\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$.

   On trouve par exemple :

$$\begin{aligned}
\delta - \beta &= \frac{F_{n-3}}{F_{n-1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-3}F_{n+1} - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(F_{n-1} - F_{n-2})(F_n + F_{n-1}) - F_{n-1}^2}{F_{n-1}F_{n+1}} \\
&= \frac{F_{n-1}(F_n - F_{n-2}) - F_nF_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta - \gamma &= \frac{F_{n-2}}{F_n} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-2}F_{n+1} - F_nF_{n-1}}{F_nF_{n+1}} \\
&= \frac{(F_n - F_{n-1})F_{n+1} - F_n(F_{n+1} - F_n)}{F_nF_{n+1}} = \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_nF_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\beta < \delta < \gamma$ si n est pair, et $\beta > \delta > \gamma$ si n est impair.

Dans tous les cas, les points B et C sont de part et d'autre de la droite (AD). En tout cas B et C ne sont jamais alignés avec A et D. L'illusion d'optique est d'autant plus frappante que les différences entre les taux d'accroissement tendent rapidement vers 0 quand $n \to +\infty$. [Q]

3. On raisonne par récurrence de pas deux sur n, en fixant la valeur de m.

   La propriété est vraie si $n = 0$ car $F_{m+1}F_1 + F_mF_0 = F_{m+1}$.

   Elle est vraie si $n = 1$ car $F_{m+1}F_2 + F_mF_1 = F_{m+1} + F_m = F_{m+2}$.

   Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$.

   Cela signifie que pour tout m de $\mathbb{N}$, $\begin{cases} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1} \\ F_{m+1}F_{n+2} + F_mF_{n+1} = F_{n+m+2} \end{cases}$

   En additionnant, on trouve : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ F_{m+1}(F_{n+1}+F_{n+2})+F_m(F_n+F_{n+1}) = F_{n+m+1}+F_{n+m+2}$

   C'est-à-dire : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ F_{m+1}F_{n+3}+F_mF_{n+2} = F_{n+m+3}$ ce qui prouve la propriété au rang $n+2$.

   Ceci achève la récurrence : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n = F_{n+m+1}$. [Q]

4. On remarque que la propriété est évidente si $n = 0$.

   On fixe n (quelconque dans $\mathbb{N}^*$) et on procède par récurrence sur q.

   La propriété est vraie de façon évidente si $q = 0$ et $q = 1$.

   On se donne donc un entier $q \geq 1$ et on suppose qu'il existe un entier k tel que $F_{qn} = kF_n$.

   Dans le résultat de la question précédente, on choisit $m = nq - 1$ (il est dans $\mathbb{N}$.)

   On trouve $F_{(q+1)n} = F_{qn}F_{n+1} + F_{qn-1}F_n = (kF_{n+1} + F_{qn-1})F_n$ qui est un multiple de F_n.

   Ceci achève la récurrence. Ainsi, pour tout (q,n) de $\mathbb{N}^2$, F_{qn} est multiple de F_n. [Q]

5. Dans le résultat de la question (3), on remplace n par $n - m - 1$.

   On obtient $F_{m+1}F_{n-m} + F_mF_{n-m-1} = F_n$.

   Puisque d divise F_m et F_n, il divise $F_{m+1}F_{n-m} = F_n - F_{n-m}F_m$.

   On sait depuis (1) que $F_m \wedge F_{m+1} = 1$. Or d divise F_m. Il en découle $d \wedge F_{m+1} = 1$.

   Ainsi d divise $F_{m+1}F_{n-m}$ et $d \wedge F_{m+1} = 1$. Le théorème de Gauss implique $d \mid F_{n-m}$. [Q]

6. Puisque $m \wedge n$ divise m et n, il en découle que $F_{m\wedge n}$ divise F_m et F_n (cf question 4.)

   Autrement dit, $F_{m\wedge n}$ divise le pgcd de F_m et de F_n.

   Réciproquement, on va montrer que si $p \mid F_m$ et $p \mid F_n$ alors $p \mid F_{m\wedge n}$.

   Le résultat est évident si $m = 0$ ou $n = 0$. On va donc supposer $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

   On va raisonner par récurrence forte sur la valeur de la somme $s = m + n$.

   Si $s = 2$, c'est-à-dire si $m = n = 1$ le résultat est évident car alors $F_m = F_n = F_{m\wedge n} = F_1 = 1$.

   On se donne maintenant m, n dans $\mathbb{N}^*$, de somme $s = m + n \geq 3$.

   On suppose que la propriété est vraie pour tous les m', n' de $\mathbb{N}^*$ tels que $s' = m' + n' < s$.

   Si $m = n$, l'implication $(p \mid F_m,\ p \mid F_n) \Rightarrow p \mid F_{m\wedge n}$ est évidente.

   On peut donc supposer par exemple $1 \leq m < n$.

   Puisque p divise F_m et F_m, il divise F_{n-m} (cf question 5.)