Mathématiques

HEC-ESCP-EML 99 : corrigé de l'épreuve de Maths II (voie S)

Roger Cuculière,
Professeur en classe préparatoire, lycée Pasteur (Neuilly sur Seine), collaborateur de diverses revues (Quadrature, Tangente, Repères, Sciences et Vie Junior...), co-auteur de "Olympiades internationales de Mathématiques 1988-97", Ed. du choix.

Nota : l'énoncé du sujet n'est pas reproduit ici pour des raisons d'espace éditorial. Il est disponible dans les rapports de jurys transmis par les Écoles à tous les établissements.

On rappelle que la fonction Γ est définie, pour $x > 0$, par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Cette fonction vérifie : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Par définition, une variable aléatoire X suivant la loi $\Gamma(b,\tau)$, avec $b > 0$ et $\tau > 0$, a pour densité : $f(x) = \dfrac{e^{-x/b}x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)b^{\tau}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. On a : $E(X) = b\tau$ et $V(X) = b^2\tau$.

Partie 1

1. 1. Soit r un entier *strictement positif* (l'énoncé semble oublier qu'il existe des entiers négatifs). La loi du χ^2 à r degrés de liberté est la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{r}{2}\right)$, qui admet donc pour densité la fonction : $f_r(x) = \dfrac{x^{(r/2)-1}e^{-x/2}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. On a : $E(X) = r$ et $V(X) = 2r$.

1. 2. a. Pour $n = 1$, l'égalité proposée : $e^{\lambda} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt$, s'écrit : $e^{\lambda} = 1 + \displaystyle\int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}dt$, qui est vraie, puisque $\displaystyle\int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}dt = e^{\lambda} = e^{\lambda}\int_0^{\lambda} e^{-t}dt = e^{\lambda}\left(-e^{-\lambda}+1\right)$.

Si l'on suppose que cette égalité proposée est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt$ au moyen d'une intégration par parties : $u = e^{\lambda-t}$, $v' = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, d'où : $u' = -e^{\lambda-t}$ et $v = \dfrac{t^n}{n!}$, et :

$\displaystyle\int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{\lambda^n}{n!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda-t}\frac{t^n}{n!}dt$, et en reportant ceci dans l'égalité proposée, il vient :

$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^n}{n!} dt$, ce qui prouve par récurrence ladite égalité.

1. 2. b. Si la variable aléatoire Y_λ suit la loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P(Y_\lambda = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$,

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(Y_\lambda < n) = P(Y_\lambda \le n-1) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Si la variable aléatoire X_{2n} suit la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté, autrement dit la loi $\Gamma(2, n)$, alors pour $\lambda > 0$, on a :

$P(X_{2n} > 2\lambda) = 1 - P(X_{2n} \le 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{x^{n-1} e^{-x/2}}{2^n \Gamma(n)} dx$. Avec l'égalité : $\Gamma(n) = (n-1)!$ et le changement de variable : $t = \frac{x}{2}$,

il vient : $P(X_{2n} > 2\lambda) = 1 - \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt$.

En multipliant par $e^{-\lambda}$ les deux membres de l'égalité trouvée à la question 1. 2. a., on obtient :

$1 - \int_0^{\lambda} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} dt = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$, soit : $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$.

1. 2. c. La question 1. 2. b. assure que : $P(X_{2n} > x) = P(Y_{x/2} < n) = e^{-x/2} Q_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, où l'on définit : $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Le calcul de $Q_n(x)$ par le procédé de Thomas Horner se ferait naturellement en posant : $y_0 = \frac{1}{n!}$ et $y_{k+1} = y_k x + \frac{1}{(n-k-1)!}$,

et donnerait : $y_n = Q_n(x)$. Mais il est très malcommode d'avoir à calculer successivement toutes ces factorielles, et cela comporte de grands risques d'erreurs d'arrondis. Alors, il est plus indiqué de poser : $z_k = (n-k)! y_k$. Cette suite z_k se définit par : $z_0 = 1$, $z_{k+1} = z_k \frac{x}{n-k} + 1$, et donne au bout du compte : $z_n = Q_n(x)$. Cet algorithme se traduit immédiatement par une fonction en langage Pascal :

```
(**************************************************************************)
FUNCTION PROB(Var n : integer ; x : real) : real ;

VAR z : real ;
    k : integer ;

BEGIN

  x := x/2 ; z :=1 ;
  for k:= 1 to n-1 do z := z*x/(n-k)+1 ;
  PROB := z*exp(-x)

END ;
(**************************************************************************)
```

1. 2. d. Pour $\lambda > 0$, on a : $F_6(2\lambda) = P(X_6 \le 2\lambda) = 1 - P(X_6 > 2\lambda) = 1 - P(Y_\lambda < 3) = 1 - P(Y_\lambda \le 2)$.

La table donnée par l'énoncé (et sur qui il faut lire Y_λ au lieu de X_λ) fournit alors les valeurs suivantes :

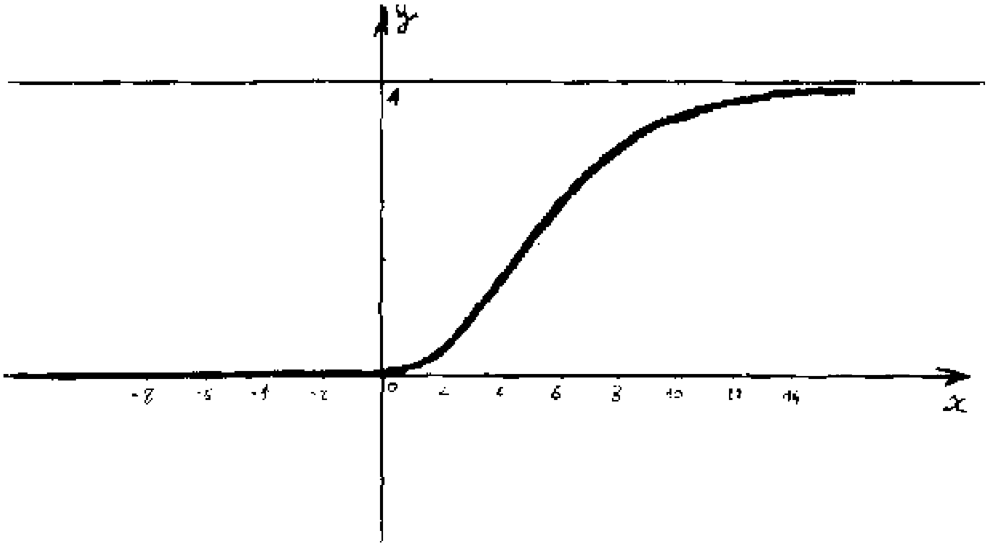
$F_6(2) = 1 - P(Y_1 \le 2) \cong 0{,}0803$, $F_6(4) = 1 - P(Y_2 \le 2) \cong 0{,}3233$, $F_6(6) = 1 - P(Y_3 \le 2) \cong 0{,}5768$,

$F_6(8) = 1 - P(Y_4 \le 2) \cong 0{,}7619$, $F_6(10) = 1 - P(Y_5 \le 2) \cong 0{,}8753$, $F_6(12) = 1 - P(Y_6 \le 2) \cong 0{,}9380$,

$F_6(14) = 1 - P(Y_7 \leq 2) \cong 0{,}9704$.

A quoi il faut ajouter : $F_6(0) = P(X_6 \leq 0) = 0$ de par la définition de la loi $\Gamma(b,\tau)$, et évidemment : $F_6(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$.

Graphe :



On sait que $F_6'(x) = f_6(x) = \dfrac{x^2 e^{-x/2}}{8\Gamma(3)}$ pour $x > 0$. Il en résulte que $F_6'(0) = 0$, et que le graphe de la fonction F_6 présente un point d'inflexion pour $x = 4$.

1. 3. a. Puisque la variable aléatoire X_1 suit une loi normale (gaussienne) centrée réduite, sa fonction de répartition est :

$P(X_1 \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$. La répartition de X_1^2 est donc, pour $x > 0$:

$F(x) = P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$, ce qui implique que, pour $x > 0$, la densité de X_1^2 est :

$f(x) = F'(x) = \dfrac{\Phi'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\Phi'(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}$, et bien sûr : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Par ailleurs, la loi du χ^2 à 1 degré de liberté est la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, qui admet pour densité la fonction : $f_1(x) = \dfrac{e^{-x/2} x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)\sqrt{2}}$ pour $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Il en résulte que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t/2} dt = \sqrt{2\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$, et que la variable aléatoire X_1^2 suit la loi du χ^2 à 1 degré de liberté, c'est-à-dire la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

1. 3. b. Les variables X_1^2, X_2^2, ..., X_k^2 sont indépendantes et suivent chacune la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. En vertu de la stabilité par la somme de la loi Γ, la somme $X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2$ suit la loi $\Gamma\left(2, \dfrac{k}{2}\right)$, autrement dit la loi du χ^2 à k degrés de liberté.

1. 3. c. Soient deux entiers r et r' tels que : $0 < r < r'$, et soient X_1, X_2, ..., X_r, ..., $X_{r'}$ des variables indépendantes gaussiennes centrées réduites. La variable aléatoire $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_r^2$ suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté, et la variable aléatoire $X' = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_r^2 + ... + X_{r'}^2$ suit la loi du χ^2 à r' degrés de liberté. On a toujours : $X' \geq X$, et l'événement $(X' \leq x)$ implique donc l'événement $(X \leq x)$. Il en résulte : $F_{X'}(x) = P(X' \leq x) \leq P(X \leq x) = F_X(x)$. Le graphe de la fonction $x \mapsto F_{X'}(x)$ est situé au-dessous du graphe de la fonction $x \mapsto F_X(x)$, et même strictement au-dessous pour $x > 0$.