

Plus loin dans l'irrationnel

Il n'est pas très difficile de montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est irrationnel.

On se propose ici de généraliser considérablement ce genre de résultat.

Pour cela, il est important de se munir de notations commodes.

- On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers.
- Pour toute partie finie A de \mathbb{P} , on note Π_A la racine carrée du produit des éléments p de A .
Par exemple, si $A = \{2, 5, 17\}$, alors $\Pi_A = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 17} = \sqrt{170}$. Par convention $\Pi_\emptyset = 1$.
Il est clair que si A et B sont deux parties disjointes de \mathbb{P} , alors $\Pi_A \Pi_B = \Pi_{A \cup B}$.
- Pour toute partie E de \mathbb{P} , le symbole \sum_A^E désigne une somme indicée sur une partie quelconque A de E .
Par exemple, si $E = \{2, 5, 17\}$, $S = \sum_A^E \lambda_A \Pi_A$ est une somme de 2^3 termes, A parcourant $\mathcal{P}(E)$.
Cette somme pourrait s'écrire, en notant par exemple $\lambda_{a,b,\dots}$ plutôt que $\lambda_{\{a,b,\dots\}}$:

$$\begin{aligned} S &= \lambda_\emptyset \Pi_\emptyset + \lambda_2 \Pi_2 + \lambda_5 \Pi_5 + \lambda_{17} \Pi_{17} + \lambda_{2,5} \Pi_{2,5} + \lambda_{2,17} \Pi_{2,17} + \lambda_{5,17} \Pi_{5,17} + \lambda_{2,5,17} \Pi_{2,5,17} \\ &= \lambda_\emptyset + \lambda_2 \sqrt{2} + \lambda_5 \sqrt{5} + \lambda_{17} \sqrt{17} + \lambda_{2,5} \sqrt{10} + \lambda_{2,17} \sqrt{34} + \lambda_{5,17} \sqrt{85} + \lambda_{2,5,17} \sqrt{170} \end{aligned}$$

Bien sûr, rien n'empêche d'écrire $S = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}$

- Pour toute partie E de \mathbb{P} , on note $\mathbb{K}_E = \{\sum_A^E \lambda_A \Pi_A, \lambda_A \in \mathbb{Q}\}$.
 \mathbb{K}_E est donc l'ensemble des combinaisons à coefficients rationnels des Π_A , pour tous les $A \subset E$.
Cette définition donne immédiatement $\mathbb{K}_\emptyset = \mathbb{Q}$. Voici quelques exemples :
 - ◇ $\mathbb{K}_{\{2\}} = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$
 - ◇ $\mathbb{K}_{\{2,5\}} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$
 - ◇ $\mathbb{K}_{\{2,5,17\}} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}, (a, b, \dots, g, h) \in \mathbb{Q}^8\}$
- Il est clair que si $E \subset F \subset \mathbb{P}$, alors $\mathbb{K}_E \subset \mathbb{K}_F$. On verra plus loin que $E \subsetneq F \Rightarrow \mathbb{K}_E \subsetneq \mathbb{K}_F$.
- Juste une petite remarque, en prenant par exemple $E = \{2, 5, 17\}$:
Soit $S = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{17} + e\sqrt{10} + f\sqrt{34} + g\sqrt{85} + h\sqrt{170}$ dans \mathbb{K}_E , avec (a, b, \dots, g, h) dans \mathbb{Q}^8 .
Alors on peut écrire : $S = x + y\sqrt{17}$, avec $\begin{cases} x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + e\sqrt{10} \\ y = d + f\sqrt{2} + g\sqrt{5} + h\sqrt{10} \end{cases}$ donc $(x, y) \in \mathbb{K}_{\{2,5\}}^2$.

Dans tous le problème, E désigne une partie de \mathbb{P} .

1. On suppose que E est non vide. Montrer que Π_E est un irrationnel. [S]
2. Prouver que \mathbb{K}_E est un sous-anneau de \mathbb{R} . [S]
3. On va montrer, par récurrence sur $n = \text{card}(E)$, que \mathbb{K}_E est un sous-corps de \mathbb{R} .

La propriété est vraie si $n = 0$, car alors $E = \emptyset$ et on sait que $\mathbb{K}_\emptyset = \mathbb{Q}$.

On se donne donc un entier $n \geq 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang $n - 1$.

On suppose que $\text{card}(E) = n$. On note q un élément de E , et $G = E \setminus \{q\}$.

On se donne un élément z non nul de \mathbb{K}_E . Il s'agit de montrer que $1/z$ est dans \mathbb{K}_E .

Bien sûr, si z est dans \mathbb{K}_G , l'hypothèse de récurrence montre que $1/z$ est dans \mathbb{K}_G donc dans \mathbb{K}_E .

On suppose donc que z est dans \mathbb{K}_E mais pas dans \mathbb{K}_G .

- (a) Montrer qu'il existe x et y dans \mathbb{K}_G tels que $z = x + y\sqrt{q}$, avec $x - y\sqrt{q} \neq 0$. [S]

- (b) On note $\bar{z} = x - y\sqrt{q}$ et $\omega = z\bar{z} = x^2 - qy^2$. Montrer que ω est un élément non nul de \mathbb{K}_G .
En déduire que $1/z$ est dans \mathbb{K}_E et conclure. [S]
4. On note \mathbb{R}_Q l'ensemble \mathbb{R} muni de sa structure d'espace vectoriel sur \mathbb{Q} .
- (a) Montrer que \mathbb{K}_E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de \mathbb{R}_Q .
Préciser un majorant de la dimension de \mathbb{K}_E , en fonction de $n = \text{card}(E)$. [S]
- (b) Dans cette question, on va redémontrer que \mathbb{K}_E est un corps.
Soit x un élément non nul de \mathbb{K}_E . Pour tout y de \mathbb{K}_E , on pose $\varphi(y) = xy$.
Montrer que φ est un automorphisme du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{K}_E .
En déduire que l'inverse dans \mathbb{R} du réel x est encore un élément de \mathbb{K}_E . Conclure. [S]
5. On va prouver, par récurrence sur $n \geq 0$, la propriété \mathcal{H}_n cidessous :
- \mathcal{H}_n : « Soit $E \subset \mathbb{P}$, avec $\text{card}(E) = n$. Soit $F \in \mathbb{P}$, avec $F \not\subset E$. Alors Π_F n'est pas dans \mathbb{K}_E »
- (a) Vérifier que la propriété est vraie si $n = 0$. [S]
- Dans la suite de cette question, on fixe $n \geq 1$, et on suppose que \mathcal{H}_{n-1} est vraie.
Par l'absurde, on suppose que \mathcal{H}_n est fausse. Il existe donc une partie E de \mathbb{P} de cardinal n , et une partie F de \mathbb{P} non incluse dans E , telles que Π_F soit élément de \mathbb{K}_E .
On se donne un élément q de E , et on note $G = E \setminus \{q\}$.
- (b) Montrer qu'il existe x et y dans \mathbb{K}_G , avec $y \neq 0$, tels que $\Pi_F = x + y\sqrt{q}$. [S]
- (c) Après élévation au carré, montrer que $x = 0$ donc $\Pi_F = y\sqrt{q}$, avec y dans \mathbb{K}_G . [S]
- (d) En discutant suivant la présence de q dans F , aboutir à une contradiction et conclure. [S]
6. Soit E une partie de \mathbb{P} , de cardinal n .
Montrer que \mathbb{K}_E est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension 2^n , et en donner une base. [S]
7. On se donne des parties non vides A_1, A_2, \dots, A_m de \mathbb{P} , distinctes deux à deux, avec $m \geq 1$.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ des rationnels *non tous nuls*. Pour $1 \leq k \leq m$, on note : $q_k = \prod_{p \in A_k} p$.
Montrer que le réel $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sqrt{q_k}$ est un irrationnel.
- Exemple : si $\begin{cases} A_1 = \{2\}, A_2 = \{5\}, A_3 = \{7\}, \\ A_4 = \{2, 5\}, A_5 = \{3, 5\} \end{cases}$, alors $\begin{cases} q_1 = 2, q_2 = 5, q_3 = 7 \\ q_4 = 10, q_5 = 15 \end{cases}$
- Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{\vec{0}\}$, $x = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{5} + \lambda_3\sqrt{7} + \lambda_4\sqrt{10} + \lambda_5\sqrt{15}$ est irrationnel. [S]
8. Montrer que $u_n = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ n'est jamais un rationnel. [S]