Plus loin dans l'irrationnel

Il n'est pas très difficile de montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

On se propose ici de généraliser considérablement ce genre de résultat.

Pour cela, il est important de se munir de notations commodes.

- On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
- Pour toute partie finie A de $\mathbb{P}$, on note Π_A la racine carrée du produit des éléments p de A.
  Par exemple, si $A=\{2,5,17\}$, alors $\Pi_A=\sqrt{2\cdot 5\cdot 17}=\sqrt{170}$. Par convention $\Pi_\emptyset=1$.
  Il est clair que si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{P}$, alors $\Pi_A\Pi_B=\Pi_{A\cup B}$.
- Pour toute partie E de $\mathbb{P}$, le symbole $\sum_A^E$ désigne une somme indicée sur une partie quelconque A de E.
  Par exemple, si $E=\{2,5,17\}$, $S=\sum_A^E \lambda_A\Pi_A$ est une somme de 2^3 termes, A parcourant $\mathcal{P}(E)$.
  Cette somme pourrait s'écrire, en notant par exemple $\lambda_{a,b,\dots}$ plutôt que $\lambda_{\{a,b,\dots\}}$:
  $S=\lambda_\emptyset\,\Pi_\emptyset+\lambda_2\,\Pi_2+\lambda_5\,\Pi_5+\lambda_{17}\,\Pi_{17}+\lambda_{2,5}\,\Pi_{2,5}+\lambda_{2,17}\,\Pi_{2,17}+\lambda_{5,17}\,\Pi_{5,17}+\lambda_{2,5,17}\,\Pi_{2,5,17}$
  $=\lambda_\emptyset+\lambda_2\,\sqrt{2}+\lambda_5\,\sqrt{5}+\lambda_{17}\,\sqrt{17}+\lambda_{2,5}\,\sqrt{10}+\lambda_{2,17}\,\sqrt{34}+\lambda_{5,17}\,\sqrt{85}+\lambda_{2,5,17}\,\sqrt{170}$
  Bien sûr, rien n'empêche d'écrire $S=a+b\,\sqrt{2}+c\,\sqrt{5}+d\,\sqrt{17}+e\,\sqrt{10}+f\,\sqrt{34}+g\,\sqrt{85}+h\,\sqrt{170}$
- Pour toute partie E de $\mathbb{P}$, on note $\mathbb{K}_E=\{\sum_A^E \lambda_A\Pi_A,\ \lambda_A\in\mathbb{Q}\}$.
  $\mathbb{K}_E$ est donc l'ensemble des combinaisons à coefficients rationnels des Π_A, pour tous les $A\subset E$.
  Cette définition donne immédiatement $\mathbb{K}_\emptyset=\mathbb{Q}$. Voici quelques exemples :
  - $\mathbb{K}_{\{2\}}=\{a+b\,\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$
  - $\mathbb{K}_{\{2,5\}}=\{a+b\,\sqrt{2}+c\,\sqrt{5}+d\,\sqrt{10},\ (a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4\}$
  - $\mathbb{K}_{\{2,5,17\}}=\{a+b\,\sqrt{2}+c\,\sqrt{5}+d\,\sqrt{17}+e\,\sqrt{10}+f\,\sqrt{34}+g\,\sqrt{85}+h\,\sqrt{170},\ (a,b,\dots,g,h)\in\mathbb{Q}^8\}$
- Il est clair que si $E\subset F\subset\mathbb{P}$, alors $\mathbb{K}_E\subset\mathbb{K}_F$. On verra plus loin que $E\subsetneq F\Rightarrow\mathbb{K}_E\subsetneq\mathbb{K}_F$.
- Juste une petite remarque, en prenant par exemple $E=\{2,5,17\}$:
  Soit $S=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{17}+e\sqrt{10}+f\sqrt{34}+g\sqrt{85}+h\sqrt{170}$ dans $\mathbb{K}_E$, avec $(a,b\dots,g,h)$ dans $\mathbb{Q}^8$.
  Alors on peut écrire : $S=x+y\sqrt{17}$, avec $\begin{cases}x=a+b\,\sqrt{2}+c\,\sqrt{5}+e\,\sqrt{10}\\ y=d+f\,\sqrt{2}+g\,\sqrt{5}+h\,\sqrt{10}\end{cases}$ donc $(x,y)\in\mathbb{K}_{\{2,5\}}^2$.

Dans tous le problème, E désigne une partie de $\mathbb{P}$.

1. On suppose que E est non vide. Montrer que Π_E est un irrationnel. [S]
2. Prouver que $\mathbb{K}_E$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. [S]
3. On va montrer, par récurrence sur $n=\text{card}(E)$, que $\mathbb{K}_E$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
   La propriété est vraie si $n=0$, car alors $E=\emptyset$ et on sait que $\mathbb{K}_\emptyset=\mathbb{Q}$.
   On se donne donc un entier $n\geq 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$.
   On suppose que $\text{card}(E)=n$. On note q un élément de E, et $G=E\setminus\{q\}$.
   On se donne un élément z non nul de $\mathbb{K}_E$. Il s'agit de montrer que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_E$.
   Bien sûr, si z est dans $\mathbb{K}_G$, l'hypothèse de récurrence montre que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_G$ donc dans $\mathbb{K}_E$.
   On suppose donc que z est dans $\mathbb{K}_E$ mais pas dans $\mathbb{K}_G$.
   (a) Montrer qu'il existe x et y dans $\mathbb{K}_G$ tels que $z=x+y\sqrt{q}$, avec $x-y\sqrt{q}\neq 0$. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

(b) On note $\overline{z} = x - y\sqrt{q}$ et $\omega = z\overline{z} = x^2 - qy^2$. Montrer que ω est un élément non nul de $\mathbb{K}_G$.
En déduire que $1/z$ est dans $\mathbb{K}_E$ et conclure. [S]

4. On note $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $\mathbb{K}_E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$.
Préciser un majorant de la dimension de $\mathbb{K}_E$, en fonction de $n = \text{card}(E)$. [S]

(b) Dans cette question, on va redémontrer que $\mathbb{K}_E$ est un corps.
Soit x un élément non nul de $\mathbb{K}_E$. Pour tout y de $\mathbb{K}_E$, on pose $\varphi(y) = xy$.
Montrer que φ est un automorphisme du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_E$.
En déduire que l'inverse dans $\mathbb{R}$ du réel x est encore un élément de $\mathbb{K}_E$. Conclure. [S]

5. On va prouver, par récurrence sur $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{H}_n$ cidessous :
$\mathcal{H}_n$: « Soit $E \subset \mathbb{P}$, avec $\text{card}(E) = n$. Soit $F \in \mathbb{P}$, avec $F \not\subset E$. Alors Π_F n'est pas dans $\mathbb{K}_E$ »

(a) Vérifier que la propriété est vraie si $n = 0$. [S]

Dans la suite de cette question, on fixe $n \geq 1$, et on suppose que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vraie.
Par l'absurde, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est fausse. Il existe donc une partie E de $\mathbb{P}$ de cardinal n, et une partie F de $\mathbb{P}$ non incluse dans E, telles que Π_F soit élément de $\mathbb{K}_E$.
On se donne un élément q de E, et on note $G = E \setminus \{q\}$.

(b) Montrer qu'il existe x et y dans $\mathbb{K}_G$, avec $y \neq 0$, tels que $\Pi_F = x + y\sqrt{q}$. [S]

(c) Après élévation au carré, montrer que $x = 0$ donc $\Pi_F = y\sqrt{q}$, avec y dans $\mathbb{K}_G$. [S]

(d) En discutant suivant la présence de q dans F, aboutir à une contradiction et conclure. [S]

6. Soit E une partie de $\mathbb{P}$, de cardinal n.
Montrer que $\mathbb{K}_E$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2^n, et en donner une base. [S]

7. On se donne des parties non vides $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de $\mathbb{P}$, distinctes deux à deux, avec $m \geq 1$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des rationnels *non tous nuls*. Pour $1 \leq k \leq m$, on note : $q_k = \prod_{p \in A_k} p$.
Montrer que le réel $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sqrt{q_k}$ est un irrationnel.
Exemple : si $\begin{cases} A_1 = \{2\}, A_2 = \{5\}, A_3 = \{7\}, \\ A_4 = \{2,5\},\ A_5 = \{3,5\} \end{cases}$ alors $\begin{cases} q_1 = 2, q_2 = 5, q_3 = 7 \\ q_4 = 10,\ q_5 = 15 \end{cases}$
Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{Q}^5 \setminus \{\vec{0}\}$, $x = \lambda_1\sqrt{2} + \lambda_2\sqrt{5} + \lambda_3\sqrt{7} + \lambda_4\sqrt{10} + \lambda_5\sqrt{15}$ est irrationnel. [S]

8. Montrer que $u_n = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ n'est jamais un rationnel. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.