On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à l'élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsque l'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les évènements suivants :

ABC_n : « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
AB_n : « à l'issue *de la* $n^{ième}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés ».
On définit de façon analogue les évènements BC_n *et* CA_n.
A_n : « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
On définit de façon analogue les évènements B_n et C_n.
$\varnothing_n$: « à l'issue de la $n^{ième}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, $\varnothing_0$ l'événement impossible.

* * *

Partie I

On établit dans cette partie I quelques résultats probabilistes préliminaires.

1) Calcul de probabilités.

a) Exprimer, si U et V désignent deux évènements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.

b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2) Détermination de probabilités conditionnelles.

a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel *n*.
Dans la suite, on ne considérera donc que les évènements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n et $\varnothing_n$.

b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

c) Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.

d) Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.

e) Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.

f) Expliciter $p(\varnothing_{n+1} / ABC_n)$, $p(\varnothing_{n+1} / BC_n)$ et $p(\varnothing_{n+1} / CA_n)$.

3) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat.

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au-delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $T=1$?

b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap .... \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n .$$

c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des évènements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap ... \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap ... \cap CA_n$
(pour $k=0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap ... \cap CA_n$)

d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des évènements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap ... \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap ... \cap BC_n$
(pour $k=0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap ... \cap BC_n$).

e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la nième épreuve, et en déduire la probabilité $p(T=n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n=1$ le résultat obtenu à la question a).

f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T=n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance E(T) de la variable aléatoire T.

Partie II

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1) Expression de la matrice de transition M

a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n)$, $p(BC_n)$, $p(CA_n)$, $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(\varnothing_n)$.
Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n .$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

b) En déduire E_n en fonction de n, de M et E_0.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

2) Calcul des puissances de la matrice M.

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4. Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

b) Expliciter les matrices *U* et *V* telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}$$

c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \ldots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la *première* composante de V_1 vaut 1
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre V_1, V_2, V_3. Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$.

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X.

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles $(U^n), (I_3 + U + U^2 + \ldots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \ldots + VU^{n-1})$.

c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n).

d) Vérifier que les suites $(p(ABC_n)), (p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n)), (p(B_n)), (p(C_n)), (p(\varnothing_n))$.

Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

Correction

PARTIE I

1) a) D'après le cours, on peut écrire :

$$\boxed{p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)}$$

b) Considérons une épreuve à laquelle participent A, B et C et notons X, Y et Z les événements définis respectivement par "A rate son tir", "B réussit son tir" et "C réussit son tir. On a :

$p(X \cap (Y \cup Z)) = p((X \cap Y) \cup (X \cap Z))$ donc, d'après le résultat de la question précédente, avec $U = (X \cap Y)$ et $V = (X \cap Z)$:

$= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p((X \cap Y) \cap (X \cap Z))$ i.e. :

$= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p(X \cap Y \cap Z)$.

Or, les tirs des trois joueurs étant mutuellement indépendants, X, Y et Z le sont également, et l'on peut donc écrire :

$p(X \cap (Y \cup Z)) = p(X)p(Y) + p(X)p(Z) - p(X)p(Y)p(Z)$ d'où par hypothèse :

$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ soit finalement :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C,} \\ \text{(A rate son tir) et (B ou réussissent leur tir) est égale à } \frac{2}{9}\end{array}}$$

c) On a :

$p(Y \cup Z) = p((X \cup \overline{X}) \cap (Y \cup Z))$ soit encore :

$= p((X \cap (Y \cup Z)) \cup (\overline{X} \cap (Y \cup Z)))$ donc, ces événements étant incompatibles (A ne peut à la fois réussir et rater son tir):

$= p(X \cap (Y \cup Z)) + p(\overline{X} \cap (Y \cup Z))$ soit encore :

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

$p(\overline{X} \cap (Y \cup Z)) = p(Y \cup Z) - p(X \cap (Y \cup Z))$ d'où, d'après le résultat des questions I.1.a et I.1.b :

$= p(Y) + p(Z) - p(Y \cap Z) - \frac{2}{9}$ dont, Y et Z étant indépendants :

$= p(Y) + p(Z) - p(Y)p(Z) - \frac{2}{9}$ d'où, par hypothèse :

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$ soit finalement :

La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C, (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir) est égale à $\frac{4}{9}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que l'événement AB_n soit réalisé, il faut que, à l'une des épreuves précédentes numérotée i $(1 \leq i \leq n)$, C ait été éliminé. Or, pour que C soit éliminé à l'issue de l'épreuve i et que l'événement AB_n puisse être réalisé, il faut que les trois joueurs participent à l'épreuve i. De plus, par hypothèse, si les trois joueurs participent àl'épreuve i, C n'est pas visé et ne peut donc être éliminé (A visant B tandis que B et C visent A). Ainsi, l'événement AB_n est impossible.

Le cas n=0 rejoignant le cas général (par hypothèse, l'événement AB_0 est impossible), on peut désormais conclure :

Pour tout entier naturel n, l'événement AB_n est impossible

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement ABC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, aucun des participants ne soit éliminé, donc que tous les participants ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$p\left(ABC_{n+1} / ABC_n\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\left(ABC_{n+1} / ABC_n\right) = \frac{1}{9}$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

c) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement BC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant B) rate son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question I.1.b, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\left(BC_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{9}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement CA_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul B soit éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que B et C (visant tous deux A) ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$p\left(CA_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\left(CA_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{2}{9}$$

d) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question I.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), C ne peut être éliminé à la $(n+1)^{ème}$ épreuve, donc les événements A_{n+1} et B_{n+1} ne peuvent être réalisés.

On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\left(A_{n+1}/ABC_n\right) = p\left(B_{n+1}/ABC_n\right) = 0$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'es-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul C ne soit pas éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question I.1.c, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\left(C_{n+1}/ABC_n\right) = \frac{4}{9}$$

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

e) ■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'es-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement A_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(A_{n+1}/CA_n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(A_{n+1}/CA_n\right) = \frac{4}{9}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement B_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(B_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(B_{n+1}/BC_n\right) = \frac{1}{3}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(C_{n+1}/CA_n\right) = \left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} \qquad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(C_{n+1}/CA_n\right) = \frac{1}{9}}$$

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, que seul B soit éliminé, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

$p\left(C_{n+1}/BC_n\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, p\left(C_{n+1}/BC_n\right)=\frac{1}{6}}$$

f) ■ Soit $n\in\mathbb{N}$. De même qu'à la question I.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), C ne peut être éliminé à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, donc l'événement $\varnothing_{n+1}$ ne peut être réalisé. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, p\left(\varnothing_{n+1}/ABC_n\right)=0}$$

■ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement $\varnothing_{n+1}$ soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, que B et C soient éliminés, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$p\left(\varnothing_{n+1}/BC_n\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, p\left(\varnothing_{n+1}/BC_n\right)=\frac{1}{6}}$$

■ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{ème}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{ème}$ épreuve), pour que l'événement $\varnothing_{n+1}$ soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{ème}$ épreuve, A et C soient éliminés, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$p\left(\varnothing_{n+1}/CA_n\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, p\left(\varnothing_{n+1}/CA_n\right)=\frac{2}{9}}$$

3) a) L'événement ABC_0 étant certain, on peut écrire :

$p(T=1)=p\left(T=1/ABC_0\right)$.

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

Or on a vu que, à l'issue de la première épreuve, C n'est pas éliminé. Sachant que l'événement ABC_0 est réalisé, pour que l'événement $[T=1]$ soit réalisé, il faut et il suffit donc que l'événement C_1 soit réalisé. On a donc :

$p(T=1)=p(C_1/ABC_0)$ d'où, d'après le résultat de la question I.2.d (pour n=0) :

$$\boxed{p(T=1)=\frac{4}{9}}$$

b) En notant $p_{1,n}$ la probabilité recherchée, on peut écrire :

$p_{1,n}=p\left(\bigcap_{i=1}^{n} ABC_i\right)$ donc, d'après la formule des probabilités composées, comme : $p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} ABC_i\right)\neq 0$:

$$=p(ABC_1)\prod_{i=2}^{n} p\left(ABC_i\Big/\bigcap_{j=1}^{i-1} ABC_j\right).$$

Or, pour $j\in\mathbb{N}^*$, l'événement ABC_j est inclus dans l'événement ABC_{j-1} (si aucun joueur n'est éliminé à l'issue de la $j^{ème}$ épreuve, aucun ne l'était à l'issue de la $(j-1)^{ème}$) donc la suite d'événements $(ABC_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et l'on a donc :

$p_{1,n}=p(ABC_1)\prod_{i=2}^{n} p(ABC_i/ABC_{i-1})$ et donc, d'après le résultat de la question I.2b et comme : $p(ABC_1)=p(ABC_1/ABC_0)=\frac{1}{9}$:

$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{9}$ soit finalement, le produit comportant n termes égaux :

$$\boxed{\text{L'événement } ABC_1\cap ABC_2\ldots\cap ABC_n \text{ a une probabilité égale à } \frac{1}{9^n}}$$

c) Les événements $ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\ldots\cap CA_n (1\leq k\leq n-1)$ et $CA_1\cap CA_2\cap\ldots\cap CA_n$ étant incompatibles deux à deux (B ne pouvant être éliminé à l'issue de deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{2,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{2,n}=\sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1\cap\ldots\cap ABC_k\cap CA_{k+1}\ldots\cap CA_n)+p(CA_1\cap CA_2\cap\ldots\cap CA_n).$$

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

❒ De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{n-1} CA_j\right)\right) \neq$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n \geq 3$) :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_K \cap CA_{K+1} \ldots \cap CA_n) = p\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) p\left(CA_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \times \prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

soit encore, par définition de $p_{1,k}$ (valable aussi si k=1) :

$$= p_{1,k} p\left(CA_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \times \prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{ème}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], \forall i \in [\![k+2, n]\!], p\left(CA_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right) = p\left(CA_i / CA_{i-1}\right) \quad \text{et :}$$

$$p\left(CA_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) = p\left(CA_{k+1} / ABC_k\right) \quad \text{donc :}$$

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p\left(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n\right) = p_{1,k} p\left(CA_{k+1} / ABC_k\right) \prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i / CA_{i-1}\right) \quad \text{et}$$

donc, d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$= \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} p\left(CA_i / CA_{i-1}\right).$$

❒ Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement CA_{i-1} est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{ème}$ épreuve, donc participent à la $i^{ème}$ épreuve), pour que l'événement CA_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve, A et C ne soient pas éliminés, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(CA_i / CA_{i-1}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{2}{9} \text{①}.$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

On a donc :

$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} \frac{2}{9}$ d'où, le produit comportant n-k-1 termes égaux :

$= \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$.

Le cas k=n-1 rejoignant le cas général (après vérification), on a donc :

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$.

❒ Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$p(CA_1 \cap CA_2 \cap \ldots \cap CA_n) = p(CA_1) \prod_{i=2}^{n} p\left(CA_i \Big/ \bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right)$ donc, de même que précédemment et comme : $p(CA_1) = p(CA_1/ABC_0)$:

$= p(CA_1/ABC_0) \prod_{i=2}^{n} p(CA_i/CA_{i-1})$ d'où, d'après ① le résultat de la question I.2c ;

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n$ soit encore :

$\frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}$.

❒ On peut finalement écrire :

$p_{2,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} + \frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}$ soit encore :

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc, en reconnaissant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ et de premier terme 1 :

$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ soit finalement :

La réunion pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ des évènements $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \ldots \cap CA_n$ a une probabilité égale à $2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

d) Les évènements $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n (1 \leq k \leq n-1)$ et $BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n$ étant incompatibles deux à deux (A ne pouvant être éliminé à l'issue des deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{3,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{3,n} = \sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) + p(BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n) .$$

❑ De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n \geq 3$) :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = p\left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) x$$

$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right)$$

soit encore :

$$= p_{1,k} p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) x$$

$$\prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right).$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{ème}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], \forall i \in [\![k+2, n]\!], p\left(BC_i \Big/ \left(\bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) = p\left(BC_i / BC_{i-1}\right) \quad \text{et :}$$

$$p\left(BC_{k+1} \Big/ \bigcap_{j=1}^{k} ABC_j\right) = p\left(BC_{k+1} / ABC_k\right) \quad \text{donc :}$$

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = p_{1,k} p\left(BC_{k+1} / ABC_k\right) \prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i \Big/ BC_{i-1}\right)$$

et donc d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$= \frac{1}{9^k} x \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} p\left(BC_i / BC_{i-1}\right)$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.

❑ Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement BC_{i-1} est réalisé (c'est à dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{ème}$ épreuve, donc participent à la $i^{ème}$ épreuve), pour que l'événement BC_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $i^{ème}$ épreuve, B et C ne soient pas éliminés, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(BC_i / BC_{i-1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$ d'où :

$$= \frac{1}{3} \quad ②$$

On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n-2]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = \frac{1}{9^k} x \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^{n} \frac{1}{3}$$ d'où le produit comportant n-k-1 termes égaux et comme $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} x \frac{1}{3}$:

$$= \frac{2}{9^k} x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

Le cas k=n-1 rejoignant le cas général, on a donc :

$$\forall k [\![1, n-1]\!], p(ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \ldots \cap BC_n) = \frac{2}{9^k} x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

❑ Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$$p(BC_1 \cap BC_2 \cap \ldots \cap BC_n) = p(BC_1) \prod_{i=2}^{n} p\left(BC_i \Big/ \bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right)$$ donc, de même que précédemment et comme : $p(BC_1) = p\left(BC_1 / ABC_0\right)$:

$$= p\left(BC_1 / ABC_0\right) \prod_{i=2}^{n} p\left(BC_i / BC_{i-1}\right)$$ d'où, d'après ② et le résultat de la question I.2c :

$$= \frac{2}{9} x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$ soit encore :

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 36 pages.