



On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à l'élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- Lorsque l'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A)

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les évènements suivants :

- ABC_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
 AB_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés ».
On définit de façon analogue les évènements BC_n et CA_n .
 A_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
On définit de façon analogue les évènements B_n et C_n .
 \emptyset_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'évènement certain, AB_0 , BC_0 , CA_0 , A_0 , B_0 , C_0 , \emptyset_0 l'évènement impossible.

* * *

Partie I

On établit dans cette partie I quelques résultats probabilistes préliminaires.

1) Calcul de probabilités.

- Exprimer, si U et V désignent deux évènements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'évènement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
- En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2) Détermination de probabilités conditionnelles.

- Montrer que l'évènement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n .
Dans la suite, on ne considérera donc que les évènements ABC_n , BC_n , CA_n , A_n , B_n , C_n et \emptyset_n .
- Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.

- c) Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.
- d) Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.
- e) Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.
- f) Expliciter $p(\emptyset_{n+1} / ABC_n)$, $p(\emptyset_{n+1} / BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1} / CA_n)$.

3) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat.

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au-delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

- a) Quelle est la probabilité de l'événement $T=1$?
- b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :
 $ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n$.
- c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n$
 (pour $k=0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$)
- d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$: $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n$
 (pour $k=0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$).
- e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la nième épreuve, et en déduire la probabilité $p(T=n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n=1$ le résultat obtenu à la question a).
- f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T=n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

Partie II

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1) Expression de la matrice de transition M

- a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n)$, $p(BC_n)$, $p(CA_n)$, $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(\emptyset_n)$.
 Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n$$

 On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.
- b) En déduire E_n en fonction de n , de M et E_0 .

2) Calcul des puissances de la matrice M.

- a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U' , U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V' , V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4. Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M' M'' = \begin{bmatrix} U' U'' & O \\ V' U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

- b) Expliciter les matrices U et V telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}$$

- c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & O \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3) Diagonalisation de la matrice U

- a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la *première* composante de V_1 vaut 1
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

- b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre V_1, V_2, V_3 . Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

- a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$.

- b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X .

On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n) , $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$.

- c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n) .
- d) Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(p(C_n))$, $(p(\emptyset_n))$.

Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.

Correction

PARTIE I

1) a) D'après le cours, on peut écrire :

$$p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)$$

b) Considérons une épreuve à laquelle participent A, B et C et notons X, Y et Z les événements définis respectivement par "A rate son tir", "B réussit son tir" et "C réussit son tir". On a :

$$\begin{aligned} p(X \cap (Y \cup Z)) &= p((X \cap Y) \cup (X \cap Z)) && \text{donc, d'après le résultat de la question} \\ & && \text{précédente, avec } U = (X \cap Y) \text{ et } V = (X \cap Z) : \\ &= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p((X \cap Y) \cap (X \cap Z)) && \text{i.e. :} \\ &= p(X \cap Y) + p(X \cap Z) - p(X \cap Y \cap Z). \end{aligned}$$

Or, les tirs des trois joueurs étant mutuellement indépendants, X, Y et Z le sont également, et l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p(X \cap (Y \cup Z)) &= p(X)p(Y) + p(X)p(Z) - p(X)p(Y)p(Z) && \text{d'où par hypothèse :} \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} && \text{soit finalement :} \end{aligned}$$

La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C, (A rate son tir) et (B ou réussissent leur tir) est égale à $\frac{2}{9}$

c) On a :

$$\begin{aligned} p(Y \cup Z) &= p((X \cup \bar{X}) \cap (Y \cup Z)) \\ &= p((X \cap (Y \cup Z)) \cup (\bar{X} \cap (Y \cup Z))) \\ &= p(X \cap (Y \cup Z)) + p(\bar{X} \cap (Y \cup Z)) \end{aligned}$$

soit encore :

donc, ces événements étant incompatibles (A ne peut à la fois réussir et rater son tir) :

soit encore :

$$\begin{aligned}
 p(\bar{X} \cap (Y \cup Z)) &= p(Y \cup Z) - p(X \cap (Y \cup Z)) && \text{d'où, d'après le résultat des questions I.1.a} \\
 & && \text{et I.1.b :} \\
 &= p(Y) + p(Z) - p(Y \cap Z) - \frac{2}{9} && \text{dont, Y et Z étant indépendants :} \\
 &= p(Y) + p(Z) - p(Y)p(Z) - \frac{2}{9} && \text{d'où, par hypothèse :} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{9} && \text{soit finalement :}
 \end{aligned}$$

La probabilité pour que, lors d'une épreuve à laquelle participent A, B et C, (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir) est égale à $\frac{4}{9}$

- 2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que l'événement AB_n soit réalisé, il faut que, à l'une des épreuves précédentes numérotée i ($1 \leq i \leq n$), C ait été éliminé. Or, pour que C soit éliminé à l'issue de l'épreuve i et que l'événement AB_n puisse être réalisé, il faut que les trois joueurs participent à l'épreuve i . De plus, par hypothèse, si les trois joueurs participent à l'épreuve i , C n'est pas visé et ne peut donc être éliminé (A visant B tandis que B et C visent A). Ainsi, l'événement AB_n est impossible.

Le cas $n=0$ rejoignant le cas général (par hypothèse, l'événement AB_0 est impossible), on peut désormais conclure :

Pour tout entier naturel n , l'événement AB_n est impossible

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement ABC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, aucun des participants ne soit éliminé, donc que tous les participants ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p\left(\frac{ABC_{n+1}}{ABC_n}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \text{ et donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(ABC_{n+1}/ABC_n) = \frac{1}{9}$$

- c) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement BC_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant B) rate son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question 1.1.b, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(BC_{n+1}/ABC_n) = \frac{2}{9}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement CA_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul B soit éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que B et C (visant tous deux A) ratent leur tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(CA_{n+1}/ABC_n) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(CA_{n+1}/ABC_n) = \frac{2}{9}$$

- d) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question 1.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), C ne peut être éliminé à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, donc les événements A_{n+1} et B_{n+1} ne peuvent être réalisés. On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(A_{n+1}/ABC_n) = p(B_{n+1}/ABC_n) = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul C ne soit pas éliminé, donc que A (visant B) réussisse son tir et que l'un des joueurs B ou C (visant tous deux A) réussisse son tir. D'après le résultat de la question 1.1.c, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(C_{n+1}/ABC_n) = \frac{4}{9}$$

- e) ■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement A_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(A_{n+1}/CA_n) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(A_{n+1}/CA_n) = \frac{4}{9}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement B_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul C soit éliminé, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(B_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(B_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{3}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, seul A soit éliminé, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(C_{n+1}/CA_n) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{1}{3} \quad \text{et donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(C_{n+1}/CA_n) = \frac{1}{9}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement C_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, que seul B soit éliminé, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(C_{n+1}/BC_n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p(C_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{6}}$$

- f) ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. De même qu'à la question 1.2.a, sachant que l'événement ABC_n est réalisé (c'est-à-dire que A, B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), C ne peut être éliminé à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, donc l'événement \emptyset_{n+1} ne peut être réalisé. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p(\emptyset_{n+1}/ABC_n) = 0}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement BC_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement \emptyset_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, que B et C soient éliminés, donc que B (visant C) réussisse son tir et que C (visant B) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(\emptyset_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p(\emptyset_{n+1}/BC_n) = \frac{1}{6}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement CA_n est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ épreuve et participent donc à la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement \emptyset_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $(n+1)^{\text{ème}}$ épreuve, A et C soient éliminés, donc que A (visant C) réussisse son tir et que C (visant A) réussisse son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(\emptyset_{n+1}/CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \quad \text{et donc :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p(\emptyset_{n+1}/CA_n) = \frac{2}{9}}$$

- 3) a) L'événement ABC_0 étant certain, on peut écrire :

$$p(T = 1) = p(T = 1/ABC_0).$$

Or on a vu que, à l'issue de la première épreuve, C n'est pas éliminé. Sachant que l'événement ABC_0 est réalisé, pour que l'événement $[T = 1]$ soit réalisé, il faut et il suffit donc que l'événement C_1 soit réalisé. On a donc :

$$p(T = 1) = p(C_1/ABC_0) \quad \text{d'où, d'après le résultat de la question I.2.d (pour } n=0 \text{):}$$

$$p(T = 1) = \frac{4}{9}$$

b) En notant $p_{1,n}$ la probabilité recherchée, on peut écrire :

$$\begin{aligned} p_{1,n} &= p\left(\bigcap_{i=1}^n ABC_i\right) \quad \text{donc, d'après la formule des probabilités composées, comme :} \\ &= p(ABC_1) \prod_{i=2}^n p\left(ABC_i / \bigcap_{j=1}^{i-1} ABC_j\right) \end{aligned}$$

Or, pour $j \in \mathbb{N}^*$, l'événement ABC_j est inclus dans l'événement ABC_{j-1} (si aucun joueur n'est éliminé à l'issue de la $j^{\text{ème}}$ épreuve, aucun ne l'était à l'issue de la $(j-1)^{\text{ème}}$) donc la suite d'événements $(ABC_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et l'on a donc :

$$\begin{aligned} p_{1,n} &= p(ABC_1) \prod_{i=2}^n p(ABC_i/ABC_{i-1}) \quad \text{et donc, d'après le résultat de la question I.2b et} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{9} \quad \text{comme : } p(ABC_1) = p(ABC_1/ABC_0) = \frac{1}{9} : \\ & \quad \text{soit finalement, le produit comportant } n \text{ termes égaux :} \end{aligned}$$

L'événement $ABC_1 \cap ABC_2 \dots \cap ABC_n$ a une probabilité égale à $\frac{1}{9^n}$

c) Les événements $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n$ ($1 \leq k \leq n-1$) et $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$ étant incompatibles deux à deux (B ne pouvant être éliminé à l'issue de deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{2,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{2,n} = \sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n) + p(CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n).$$

- De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{n-1} CA_j\right)\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n \geq 3$) :

$$\forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n) = p\left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) p\left(CA_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \times \prod_{i=k+2}^n p\left(CA_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

soit encore, par définition de $p_{1,k}$ (valable aussi si $k=1$) :

$$= p_{1,k} p\left(CA_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \times \prod_{i=k+2}^n p\left(CA_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right)$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{\text{ème}}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k \in [1, n-2], \forall i \in [k+2, n], p\left(CA_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} CA_j\right)\right) = p(CA_i / CA_{i-1}) \quad \text{et :}$$

$$p\left(CA_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) = p(CA_{k+1} / ABC_k) \quad \text{donc :}$$

$$\forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n) = p_{1,k} p(CA_{k+1} / ABC_k) \prod_{i=k+2}^n p(CA_i / CA_{i-1}) \quad \text{et}$$

donc, d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$= \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^n p(CA_i / CA_{i-1}).$$

- Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement CA_{i-1} est réalisé (c'est-à-dire que seuls A et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{\text{ème}}$ épreuve, donc participent à la $i^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement CA_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ épreuve, A et C ne soient pas éliminés, donc que A (visant C) rate son tir et que C (visant A) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(CA_i / CA_{i-1}) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{2}{9} \textcircled{1}.$$

On a donc :

$$\forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^n \frac{2}{9} \quad \text{d'où, le produit}$$

comportant $n-k-1$ termes égaux :

$$= \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

Le cas $k=n-1$ rejoignant le cas général (après vérification), on a donc :

$$\forall k \in [1, n-1], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n) = \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

- Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$$p(CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n) = p(CA_1) \prod_{i=2}^n p\left(CA_i / \bigcap_{j=1}^{i-1} CA_j\right) \quad \text{donc, de même que}$$

précédemment et comme :

$$p(CA_1) = p(CA_1 / ABC_0) :$$

$$= p(CA_1 / ABC_0) \prod_{i=2}^n p(CA_i / CA_{i-1}) \quad \text{d'où, d'après ① le résultat de}$$

la question I.2c ;

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

soit encore :

$$\frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}.$$

- On peut finalement écrire :

$$p_{2,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9^k} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} + \frac{1}{9^0} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-0}$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

soit encore :

donc, en reconnaissant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$ et de premier terme 1 :

soit finalement :

La réunion pour $k \in [0, n-1]$ des évènements $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \dots \cap CA_n$

$$\text{a une probabilité égale à } 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)$$

- d) Les évènements $ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n$ ($1 \leq k \leq n-1$) et $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$ étant incompatibles deux à deux (A ne pouvant être éliminé à l'issue des deux épreuves distinctes), on peut écrire, en notant $p_{3,n}$ la probabilité recherchée :

$$p_{3,n} = \sum_{k=1}^{n-1} p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n) + p(BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n).$$

- De plus, comme $p\left(\left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées (si $n \geq 3$) :

$$\begin{aligned} \forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n) &= p\left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) p\left(BC_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \times \\ &\quad \prod_{i=k+2}^n p\left(BC_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) \\ &\text{soit encore :} \\ &= p_{1,k} p\left(BC_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \times \\ &\quad \prod_{i=k+2}^n p\left(BC_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le nom des joueurs (A, B ou C) n'étant pas éliminés à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ épreuve ne dépend que du nom des joueurs n'ayant pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{\text{ème}}$ épreuve, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall k \in [1, n-2], \forall i \in [k+2, n], p\left(BC_i / \left(\bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{i-1} BC_j\right)\right) = p(BC_i / BC_{i-1}) \quad \text{et :}$$

$$p\left(BC_{k+1} / \bigcap_{j=1}^k ABC_j\right) = p(BC_{k+1} / ABC_k) \quad \text{donc :}$$

$$\forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n) = p_{1,k} p(BC_{k+1} / ABC_k) \prod_{i=k+2}^n p(BC_i / BC_{i-1})$$

et donc d'après les résultats des questions I.3b et I.2c :

$$= \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^n p(BC_i / BC_{i-1})$$

- Soit alors i un entier naturel supérieur ou égal à 3. Sachant que l'événement BC_{i-1} est réalisé (c'est à dire que seuls B et C n'ont pas été éliminés à l'issue de la $(i-1)^{\text{ème}}$ épreuve, donc participent à la $i^{\text{ème}}$ épreuve), pour que l'événement BC_i soit réalisé, il faut et il suffit que, à l'issue de la $i^{\text{ème}}$ épreuve, B et C ne soient pas éliminés, donc que B (visant C) rate son tir et que C (visant B) rate son tir. Les différents tirs étant indépendants, on a donc :

$$p(BC_i / BC_{i-1}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \textcircled{2}$$

On a donc :

$$\forall k \in [1, n-2], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n) = \frac{1}{9^k} \times \frac{2}{9} \prod_{i=k+2}^n \frac{1}{3} \quad \text{d'où le produit}$$

comportant $n-k-1$ termes égaux et comme $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$:

$$= \frac{2}{9^k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

Le cas $k=n-1$ rejoignant le cas général, on a donc :

$$\forall k [1, n-1], p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots \cap BC_n) = \frac{2}{9^k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}.$$

- Enfin, comme $p\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right) \neq 0$, on peut écrire, d'après la formule des probabilités composées :

$$p(BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n) = p(BC_1) \prod_{i=2}^n p\left(BC_i / \bigcap_{j=1}^{i-1} BC_j\right) \quad \text{donc, de même que}$$

précédemment et comme :
 $p(BC_1) = p(BC_1 / ABC_0)$:

$$= p(BC_1 / ABC_0) \prod_{i=2}^n p(BC_i / BC_{i-1}) \quad \text{d'où, d'après } \textcircled{2} \text{ et le résultat de}$$

la question I.2c :

$$= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{soit encore :}$$