Enoncé

Dans tout le problème, on considère un nombre entier $p \geq 1$ et, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq 2p$, on note $R_k[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k.
Dans la partie I, on munit $R_{2p}[x]$ d'un produit scalaire permettant d'obtenir un ajustement affine d'une famille de points du plan à l'aide de la méthode des moindres carrés, puis, dans les parties II et III, on utilise ce produit scalaire pour étudier un ajustement polynomial de cette famille de points.

Les parties II et III du problème sont indépendantes de la partie I.

Partie I

1) Définition d'un produit scalaire sur $R_{2p}[x]$.

On pose pour tout couple (A, B) de polynômes de $R_{2p}[x]$: $< A, B > = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{i=+p} A(i)B(i)$.

(dans cette formule, l'indice i prend les valeurs -p, -(p-1),..., -1, 0, 1,..., p-1, p).

Prouver que l'application $(A, B) \to < A, B >$ définit un produit scalaire sur $R_{2p}[x]$.

Dans toute la suite du problème, $R_{2p}[x]$ est muni de ce produit scalaire <.,.>, et l'on pose pour tout polynôme A de $R_{2p}[x]$:

$\|A\| = \sqrt{< A, A >}$, $m(A) = < A, 1 >$, $V(A) = \|A - m(A)\|^2$, $\sigma(A) = \sqrt{V(A)}$.

Pour tout couple (A, B) de polynômes de $R_{2p}[x]$, on définit de plus :

$$\mathrm{Cov}(A, B) = < A - m(A), B - m(B) > .$$

2) Propriétés du produit scalaire <...>.

a) Que vaut $\|1\|$ (norme du polynôme constant égal à 1) ?

b) Etablir pour tout couple (A,B) de polynômes de $R_{2p}[x]$ les quatre propriétés :

(1) $V(A) = \|A\|^2 - [m(A)]^2$.
(2) $\mathrm{Cov}(A, B) = < A, B > - m(A).m(B)$.
(3) <A,B>=0 lorsque A est pair et B impair.
(4) <xA,B>=<A,xB> lorsque A et B sont de degré au plus 2p-1.

(xA,xB) désignent ici les fonctions polynômes $x \to xA(x)$, $x \to xB(x)$ *).*

3) Détermination des normes des polynômes x et x^2.

a) Développer $(i+1)^3$ par la formule du binôme et, en sommant les égalités obtenues pour les entiers i tels que $-p \leq i \leq +p$, déterminer $\|x\|^2$.

b) Développer $(i+1)^5$ par la formule du binôme et, en procédant de même, montrer que:

$$\|x^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}.$$

4) Meilleure approximation d'un polynôme A par une constante.

a) Prouver, pour tout polynôme A de $R_{2p}[x]$, que $m(A)$ est le projeté orthogonal de A sur $R_0[x] = \mathbb{R}$.

b) En déduire pour toute constante b l'égalité $\|A-b\|^2 = V(A) + (m(A)-b)^2$, et montrer que le minimum de $\|A-b\|^2$ lorsque b décrit $\mathbb{R}$ est atteint si, et seulement si, $b = m(A)$, et que celui-ci est égal à $V(A)$.

c) A quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré du polynôme A a-t-on $V(A) \neq 0$?

Montrer qu'alors $(1, (A-m(A))/\sigma(A))$ est une base orthonormale du sous-espace vectoriel Vect(1,A) engendré par les polynômes 1 et A.

5) Meilleure approximation d'un polynôme B par un polynôme de Vect(1,A).

On donne des polynômes A, B de $R_{2p}[x]$, A étant de degré supérieur ou égal à 1, et on cherche des nombres réels a et b minimisant l'expression $\|B-aA-b\|^2$.

a) On fixe dans cette question le nombre réel a. Montrer que le nombre réel b minimisant l'expression $\|B-aA-b\|^2$ est $b = m(B)\text{-}am(A)$.

b) Pour tout nombre réel a, on note alors $f(a) = \|(B-m(B)) - a(A-m(A))\|^2$.
Exprimer $f(a)$ en fonction de a, de $V(A)$, $V(B)$ et $Cov(A,B)$ et, en étudiant les variations de la fonction f, déterminer en fonction de $V(A)$, $V(B)$, $Cov(A,B)$ le minimum μ de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur a_0 de a qui le réalise.
Prouver que μ est le minimum de l'expression $\|B-aA-b\|^2$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

c) Déduire de ces résultats l'inégalité $|Cov(A,B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)$.
Dans quel cas y a-t-il égalité dans cette inégalité ?

d) Application : déterminer en fonction du nombre entier p le minimum de l'expression $\|x^2 - ax - b\|^2$ ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

Correction

Partie I

1) Soit φ l'application définie sur $(\mathbf{R}_{2p}[x])^2$ par : $\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2, \varphi(A,B) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i)$ **.**

- φ est bien une application de $(\mathbf{R}_{2p}[x])^2$ dans $\mathbb{R}$ et on a :

- $\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2, \varphi(A,B) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i)$ soit encore :

$= \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} B(i)A(i)$ et donc, en reconnaissant $\varphi(B,A)$:

$= \varphi(B,A)$,

- $\forall (A,B,B') \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^3, \forall (\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2, \varphi(A,\lambda B+\lambda' B') = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)(\lambda B+\lambda' B')(i)$ soit :

$$= \lambda\left(\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i)\right) + \lambda'\left(\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B'(i)\right)$$

et donc, en reconnaissant $\varphi(A,B)$ et $\varphi(A,B')$:

$= \lambda\varphi(A,B) + \lambda'\varphi(A,B')$.

- $\forall A \in \mathbf{R}_{2p}[x], \varphi(A,A) = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} (A(i))^2$ soit, comme, pour tout $i \in [\![-p,p]\!], (A(i))^2 \geq 0$:

≥ 0 ,

- Soit $A \in \mathbf{R}_{2p}[x]$. D'après le calcul précédent, on peut écrire :

$\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![-p,p]\!], (A(i))^2 = 0$ i.e. :

$\Rightarrow \forall i \in [\![-p,p]\!], A(i) = 0$ et donc, comme $A \in \mathbf{R}_{2p}[x]$ et comme A admet au moins 2p+1 racines distinctes :

$\Rightarrow A = 0$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}_{2p}[x].}$$

2) **a)** On a : $\|1\|^2 = <1,1>$

$$= \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} 1 \qquad \text{donc,}$$

$$= 1.$$

On peut alors conclure, comme $\|1\| \geq 0$:

$$\boxed{\|1\| = 1}$$

b) On a :

$\forall A \in \mathbf{R}_{2p}[x], V(A) = \|A - m(A)\|^2$ soit, en développant cette expression :

$= \|A\|^2 + (m(A))^2 - 2 < A, m(A) >$ et donc, comme $< A, m(A) >= m(A) < A, 1 >=< A, 1 >^2$

$= (m(A))^2$:

$\forall A \in \mathbf{R}_{2p}[x], V(A) = \|A\|^2 - (m(A))^2$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall A \in \mathbf{R}_{2p}[x], V(A) = \|A\|^2 - (m(A))^2}$$

■ De même, on peut écrire :

$\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2, \operatorname{cov}(A,B) =< A - m(A), B - m(B) >$ soit, en développant cette expression

$= (A,B) + < m(A), m(B) > - < m(A), B > - < A, m(B) >$

et donc, comme $<1,1>=1$:

$=< A, B > + m(A)m(B) - 2 < A, 1 >< B, 1 >$ soit, en reconnaissant $m(A)$ et $m(B)$:

$=< A, B > - m(A)m(B)$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2, \operatorname{cov}(A,B) =< A, B > - m(A)m(B)}$$

- On a : $\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2, < A,B >= \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(AB)(i)$.

Or, si A est pair et B est impair, on peut écrire que :

$\forall i \in [\![-p,-1]\!], (AB)(i) = -(AB)(-i)$ et donc, en sommant cette égalité de i=-p à i=-1 :

$\sum_{i=-p}^{-1}(AB)(i) = -\left(\sum_{i=-p}^{-1}(AB)(-i)\right)$ soit, en effectuant le changement d'indice i'=-i :

$= -\left(\sum_{i=1}^{p}(AB)(i)\right)$ d'où :

$\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2$, A pair et B impair, $< A,B >= \dfrac{1}{2p+1}A(0)B(0)$ or, comme B est impair,

B(0)=0, donc :

=0.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2 \text{, A pair et B impair,} <A,B>=0}$$

- Enfin, on a :

$\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p-1}[x])^2, (xA,xB) \in (\mathbf{R}_{2p}[x])^2$ donc :

$\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p-1}[x])^2, < xA,B > = \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(iA(i))B(i)$ soit encore :

$= \dfrac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}A(i)(iB(i))$ et donc, en reconnaissant <A,xB>:

$=< A,xB >$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathbf{R}_{2p-1}[x])^2, < xA,B >=< A,xB >}$$

3) **a)** On a : $\|x\|^2 = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} i^2$. Or on sait, d'après la formule du binôme de Newton, que :

$\forall i \in [\![-p,p]\!], (i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$ soit, en sommant cette égalité i=-p à i=p :

$\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 = \sum_{i=-p}^{p}(i^3+3i) + \sum_{i=-p}^{p}(3i^2+1)$ donc, la première somme étant nulle (le polynôme x^3+3x est impair) :

$= \sum_{i=-p}^{p}(3i^2+1)$ on en déduit alors, cette somme comportant 2p+1 termes :

$\sum_{i=-p}^{p} i^2 = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 - (2p+1)\right)$ et donc, en divisant par (2p+1) :

$\|x\|^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^3 - 1\right)$ soit encore, en effectuant le changement d'indice i'=i+1 :

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p+1}^{p+1} i^3 - 1\right)$ soit, comme $\sum_{i=-p+1}^{p-1} i^3 = 0$ (car le polynôme x^3 est impair) :

$= \frac{1}{3}\left(\frac{(p+1)^3+p^3}{2p+1} - 1\right)$ donc :

$= \frac{2p^3+3p^2+p}{3(2p+1)}$ soit enfin :

$= \frac{p(p+1)}{3}$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\|x\|^2 = \frac{p(p+1)}{3}}$$

b) De même, on a :

$\forall i \in [\![-p,p]\!], (i+1)^5 = i^5 + 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$ soit, en sommant cette égalité de i=-p à i=p :

$\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^5 = \sum_{i=-p}^{p}(i^5+10i^3+5i)+\sum_{i=-p}^{p}(5i^4+10i^2+1)$ donc, la première somme étant nulle (le polynôme x^5+10x^3+5x est impair) :

$= \sum_{i=-p}^{p}(5i^4+10i^2+1)$ d'où :

$\sum_{i=-p}^{p} i^4 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^5 - 10\sum_{i=-p}^{p} i^2 - (2p+1)\right)$ et donc, comme $\|x^2\|^2 = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} i^4$, et, comme $\sum_{i=-p}^{p}(i+1)^5 = p^5+(p+1)^5$, d'après les résultats obtenus au 3a :

$\|x^2\|^2 = \frac{1}{5(2p+1)}\left(p^5+(p+1)^5 - 10\frac{p(p+1)(2p+1)}{3} - (2p+1)\right)$ soit encore :

$= \frac{6p^5+15p^4+10p^3-p}{15(2p+1)}$.

Or, on a : $p(p+1)(3p^2+3p-1)(2p+1) = 6p^5+15p^4+10p^3-p$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\|x^2\|^2 = \frac{p(p+1)(3p^2+3p-1)}{15}}$$

4) a) On sait tout d'abord que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{2p}[x]$, $m(A) \in \mathbf{R}$ donc que $m(A) \in \mathbf{R}_0[x]$. De plus on a :

$\forall A \in \mathbf{R}_{2P}[x], < A - m(A), 1 >=< A, 1 > - < m(A), 1 >$ soit, comme $< m(A), 1 >= m(A) < 1, 1 >=< A, 1 >$:

$= 0$.

On en déduit que : $\begin{cases}(A - m(A)) \in (\mathbb{R}_0[X])^{\perp} \\ m(A) \in \mathbb{R}_0[X]\end{cases}$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{m(A) \text{ est le projeté orthogonal de } A \text{ sur } \mathbb{R}_0[X]}$$

Mathématiques

b) ■ On a :

$\forall A \in \mathbb{R}_{2p}[X],\ \forall b \in \mathbb{R},\ \|A\text{-}b\|^2 = \|A\|^2 - 2 < A, b > + b^2$ soit, en considérant la relation (1) :

$= V(A) + (m(A))^2 - 2bm(A) + b^2$ soit finalement :

$= V(A) + (m(A) - b)^2$.

On peut enfin conclure :

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}_{2p}[X],\ \forall b \in \mathbb{R},\ \|A\text{-}b\|^2 = V(A) + (m(A) - b)^2}$$

■ On sait que $\|A - b\|^2$ est minimal si, et seulement si, b est le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X]$ donc, d'après le résultat de la question 4a, si, et seulement si, b=m(A). A l'aide du résultat précédent, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Le minimum de } \|A - b\|^2\text{, atteint pour } b = m(A)\text{, vaut } V(A)}$$

NB : on aurait pu directement conclure à l'aide du résultat précédent.

c) ■ On a :

$\forall A \in \mathbb{R}_{2p}[X],\ V(A) = \|A\text{-}m(A)\|^2$ d'où :

$V(A) = 0 \Leftrightarrow \|A\text{-}m(A)\|^2 = 0$ soit, $\|.\|$ étant une norme euclidienne :

$\Leftrightarrow A = m(A)$ soit, m(A) étant le projeté orthogonal de A sur $\mathbb{R}_0[X]$, d'après le résultat de la question 4a :

$\Leftrightarrow A \in \mathbb{R}_0[X]$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{V(A) \neq 0 \text{ si, et seulement si, A est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1}}$$

■ On sait que, si deg $A \geq 1$, $\sigma(A) \neq 0$, $\left(1, \dfrac{A\text{-}m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est une famille de vecteurs combinaison linéaire de 1 et de A. De plus, on a :

$. < 1, \dfrac{A - m(A)}{\sigma(A)} >= \dfrac{1}{\sigma(A)} < 1, A > - \dfrac{m(A)}{\sigma(A)} < 1, 1 >$ soit, comme $m(A) = < 1, A >$:

$= 0$ et :

. $\|1\| = 1$ et :

. $\left\|\dfrac{A-m(A)}{\sigma(A)}\right\|^2 = \dfrac{\|A-m(A)\|^2}{V(A)}$ soit, comme, par définition de V, $V(A) = \|A-m(A)\|^2$:

$=1$.

Donc, $\left(1, \dfrac{A-m(A)}{\sigma(A)}\right)$ est une famille orthonormale de deux vecteurs de $\text{Vect}(1, A)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Si deg } A \geq 1.\ \left(1, \dfrac{A\text{-}m(A)}{\sigma(A)}\right) \text{ est une base orthonormale de l'espace vectoriel engendré par 1 et A.}}$$

5) a) Comme a est fixé, les résultats de la question 4b nous permettent, en substituant B-aA à A, de dire que $\|B-aA-b\|^2$ est minimale pour b=m(B-aA). Or on a :

$m(B-aA) = \langle B-aA, 1\rangle$ soit, par bilinéarité du produit scalaire :

$= \langle B, 1\rangle - a\langle A, 1\rangle$ d'où en reconnaissant m(B) et m(A) :

$= m(B) - am(A)$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{L'expression } \|B-aA-b\|^2 \text{ est minimale pour } b=m(B)\text{-}am(A)}$$

b) ■ En développant l'expression de f(a), on a :

$\forall a \in \mathbb{R},\ f(a)=\|B\text{-}m(B)\|^2 - 2\langle B-m(B),\ a(A\text{-}m(A)\rangle + a^2\|A-m(A)\|^2$ soit en reconnaissant V(B), cov(A,B) et V(A) :

$= V(B) - 2a\,\text{cov}(A,B) + a^2V(A)$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ f(a)=V(B)\text{-}2a\text{cov}(A,B)+a^2V(A)}$$

Mathématiques

■ f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et on a :

$\forall a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 2aV(A) - 2\text{cov}(A,B)$.

On en déduit alors le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{\text{cov}(A,B)}{V(A)}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f	$+\infty$		μ		$+\infty$

On en déduit enfin que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en $\frac{\text{cov}(A,B)}{V(A)}$ et que ce minimum vaut :

$$\mu = V(B) - 2\frac{(\text{cov}(A,B))^2}{V(A)} + \frac{(\text{cov}(A,B))^2}{V(A)}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{f admet un minimum sur } \mathbb{R} \text{ en } a_0 = \frac{\text{cov}(A,B)}{V(A)} \text{ et ce minimum vaut : } \mu = V(B) - \frac{(\text{cov}(A,B))^2}{V(A)}}$$

■ D'après les résultats de la question 5a, on sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $b \mapsto \|B - aA - b\|^2$ atteint son minimum en $b = m(B) - am(A)$ et son minimum vaut f(a). Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ étant μ, on peut conclure :

$$\boxed{\mu \text{ est le minimum de } \|B - aA - b\|^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$$

c) ■ μ étant le minimum d'une norme élevée au carré, on a $\mu \geq 0$, et donc :

$\forall (A,B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$, $V(B) - \frac{(\text{cov}(A,B))^2}{V(A)} \geq 0$ donc, comme $V(A)>0$:

$\forall (A,B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$, $(\text{cov}(A,B))^2 \leq V(A)V(B)$ et, en composant cette expression par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\forall (A,B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2, \ |\text{cov}(A,B)| \leq \sigma(A)\sigma(B)}$$