Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

PARTIE I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge. On définit pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j .$$

1) Etude de la fonction F sur [0,1]

a) Montrer que la série définissant $F(t)$ est convergente pour $0 \leq t \leq 1$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur [0,1].
En déduire que F admet une limite à droite en tout point de $[0,1[$, et une limite à gauche en tout point de $]0,1]$ (on précisera le théorème utilisé).

c) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $[0,1[$.

- Etablir pour nombre réel t tel que $t_0 \leq t \leq 1$ et tout nombre entier naturel n :

$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leq \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0.

d) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $]0,1]$.
En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0, en conclure que F est continue sur [0,1].

2) Etude locale de la fonction F en 0

a) Pour tout nombre entier naturel n, établir que, pour tout nombre réel t de [0,1] :

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j .$$

b) On considère la fonction ε_n définie sur $]0,1]$ par l'égalité suivante :

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t) .$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre de n en 0, qui permet d'obtenir $p_0 \ldots, p_n$

3) Etude locale de la fonction F en 1.

a) Etablir pour tout nombre réel t de $[0,1[$:

$$\frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1}) .$$

En déduire que la fonction $t \to [F(t) - F(1)] / (t - 1)$ est croissante sur $[0,1[$.

b) On suppose dans cette question la série $\sum jp_j$ convergente.
Montrer que la fonction $t \to [F(t) - F(1)] / (t - 1)$ est alors majorée sur $[0,1[$, puis en déduire que la fonction F est dérivable en 1, et que :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j .$$

c) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.
Montrer que tout nombre réel t de $[0,1[$ et tout nombre entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} .$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n \leq F'(1)$, puis établir que la série $\sum jp_j$ est convergente et comparer sa somme à $F'(1)$.

d) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si, et seulement si, la série $\sum jp_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à $F'(1)$.

e) *Application :* pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n.
A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ? Comparer alors celle-ci à $F'(1)$.

4) Produit de deux fonctions génératrices

Soient deux suites (p_n), (q_n) de nombres réels positifs telles que les séries $\sum p_n, \sum q_n$ convergent. On pose $r_n = p_0 q_n + \ldots + p_i q_{n-i} + \ldots + p_n q_0$ pour tout nombre entier naturel n.

a) Etablir pour tout entier naturel n la majoration suivante :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j . \sum_{j=0}^{n} q_j \ .$$

En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.

b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \ , \ G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \ , \ H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j \ .$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de $[0,1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \ \leq \ \sum_{j=0}^{n} p_j t^j . \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \ \leq \ \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j \ .$$

En déduire l'égalité $F(t).G(t) = H(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul) :

- il lance la pièce :
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à K+1 francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à K-1 francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par :

- R_K l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du n$^{\text{ième}}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = 0$.

- $t \to F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie donc pour $0 \leq t \leq 1$ par :

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n \text{ .}$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\sum p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier K=1

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

a) Calculer $p_1(1), p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer, pour tout nombre entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{\text{ième}}$ jet de la pièce si, et seulement si, il existe un entier j (où $1 \leq j \leq n-1$) tel que :

- à l'issue de premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
- à l'issue des n-j jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_0(1) = 0$) :

$$p\sum_{j=0}^{n} p_j(1)p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir à l'aide des résultats de I.4 la relation $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

d) Etudier les variations de la fonction $t \to 1 - 4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle $]0,1[$, et montrer que $1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.

En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes x'(t) et x"(t) (on supposera x'(t)<x"(t)).

Pour tout nombre réel t appartenant à $]0,1[$, montrer que x"(t)>1, puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.

e) En faisant tendre t vers 1, déterminer alors $F_1(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur $p \leq 1/2$

Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque p=1/2 ?

3) Expression des probabilités $p_n(1)$

a) Rappeler le développement limité de la fonction $x \to (1+x)^{1/2}$ en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre $2m+1$ de la fonction F_1 en 0.

b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel n $p_{2n}(1) = 0$ et :

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p(1-p)^{n+1}.$$

II.2 Etude du cas général

1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1.

A l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geq 2$.

$$p_n(1) = pp_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir la relation $F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$.

b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante :

$$P_n(K) = P \cdot P_{n-1}(K+1) + (1-p)P_{n-1}(K-1)$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, F_{K+1} et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

En étudiant alors la suite $K \to U_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.

c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$

Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

3) Expression des probabilités $p_n(K)$

a) A l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a), établir que $p_{2n+1}(2) = 0$ puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout nombre entier naturel n.

b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geq 1$.

Correction

Partie I.

1) a) La suite $(p_j)_j$ étant à termes positifs, on peut écrire :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall j \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq p_j t^j \leq p_j$$

Comme par hypothèse, la série $\sum p_j$ converge, il en découle, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum p_j t^j$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La série définissant } F(t) \text{ est convergente pour } 0 \leq t \leq 1}$$

b) • Soit $(x,y) \in [0,1]^2$, $x<y$. La fonction $t \mapsto t^j$ $(j \in \mathbb{N})$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

$\forall j \in \mathbb{N},\ x^j \leq y^j$ donc, en multipliant par $p_j \geq 0$:

$\forall j \in \mathbb{N},\ p_j x^j \leq p_j y^j$ d'où, par sommation finie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j y^j .$$

Les suites $\left(\sum_{j=0}^{n} p_j x^j\right)_n$ et $\left(\sum_{j=0}^{n} p_j y^j\right)_n$ étant convergentes (cf. question 1a), on obtient alors, par prolongement des inégalités (on fait tendre n vers $+\infty$) :

$F(x) \leq F(y)$ d'où

$$\boxed{F \text{ est croissante sur } [0,1].}$$

• F étant monotone sur [0,1], on peut alors conclure, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{F admet une limite à droite en tout point de } [0,1[\\ \text{et une limite à gauche en tout point de }]0,1].\end{array}}$$

<u>NB</u> : F étant bornée sur [0,1] (par $F(0)=p_0$ et $F(1)$) ces limites sont finies.

c) • F étant croissante sur [0,1], on a, comme $0 \leq t_0 < t \leq 1$:

$F(t) - F(t_0) \geq 0$.

De plus, on a :

$F(t)-F(t_0)=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)$ d'où :

$\forall n\in\mathbb{N}, F(t)-F(t_0)=\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)+\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)$.

Or, comme : $\forall j\geq n+1,\ p_j(t^j-t_0^j)\leq p_j$, on peut écrire, par sommation finie puis par prolongement des inégalités (cf. question 1b) :

$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)\leq\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j$ d'où :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq F(t)-F(t_0)\leq\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)+\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j}.$$

• Comme $\lim\limits_{t\to t_0^+}\left(\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)\right)=0$ (par continuité des fonctions polynômes en t_0), la somme étant finie), on peut alors conclure, d'après le théorème de prolongement des inégalités (on fait tendre t vers t_0), F admettant une limite finie en t_0 à droite :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq\lim_{t\to t_0^+}F(t)-F(t_0)\leq\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j}$$

• On a :

$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j-\sum_{j=0}^{n}p_j$.

Or, comme la série $\sum p_j$ converge, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}p_j=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j$ d'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j=0$ et donc, par prolongement des inégalités :

$0\leq\lim\limits_{t\to t_0^+}F(t)-F(t_0)\leq 0$ donc :

$\lim\limits_{t\to t_0^+}F(t)=F(t_0)$ soit finalement :

$$\boxed{\text{F est continue à droite en } t_0}$$

d) F étant continue à droite en tout point de [0,1[et à gauche en tout point de]0,1], on peut conclure :

$$\boxed{\text{F est continue sur } [0,1].}$$

2) a) On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j \leq t^{n+1}$ donc, comme $\forall j \in \mathbb{N}, p_j \geq 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j p_j \leq t^{n+1} p_j$.

Par sommation finie, on obtient alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall N \geq n+1, 0 \leq \sum_{j=n+1}^{N} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{N} p_j$.

Les suites en présence étant convergentes, on peut finalement conclure, par prolongement des inégalités (on fait tendre N vers $+\infty$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], 0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j}.$$

b) Par définition de $\mathcal{E}_n (n \in \mathbb{N})$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1], \ \mathcal{E}_n(t) = \frac{F(t) - \sum_{j=0}^{n} p_j t^j}{t^n} \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j .$$

Comme : $\forall t \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{t^n} \geq 0$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1], 0 \leq \mathcal{E}_n(t) \leq t$.

D'après le théorème de l'encadrement, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{t \to 0} \mathcal{E}_n(t) = 0}$$

3) a) • On a :

$\forall t \in [0,1[, \quad F(t)\text{-}F(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j (t^j - 1)$.

Or, d'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$, on a :

$\forall t \in [0,1[, \forall j \in \mathbb{N}^*, \ k^j - 1 = (t-1)\sum_{k=0}^{j-1} t^k$

Le terme de la somme égale à $F(t) - F(1)$ en j=0 étant nul, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1})}$$

• En raisonnant comme à la question 1a, on montre :

$\forall (x,y) \in [0,1[, x < y \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+x+\ldots+x^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+y+\ldots+y^{j-1})$ d'où :

$\forall (x,y) \in [0,1[, x < y \Rightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{F(y)-F(1)}{y-1}$.

Ainsi,

$$\boxed{t \mapsto \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \text{ est croissante sur } [0,1[.}$$

b) • On a :

$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \quad 1+t+\ldots+t^{j-1} \leq j$ d'où, la suite $(p_j)_j$ étant positive :

$\forall t \in [0,1[, \forall j \in \mathbb{N}^*, p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \leq jp_j$.

Par sommation finie et par prolongement des inégalités, il en découle :

$\forall t \in [0,1[, \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$.

D'après le résultat du 3a, on en conclut :

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j}$$

• La fonction $t \mapsto \dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$ étant croissante et majorée sur [0,1[, elle admet une limite finie à gauche en 1, donc F est dérivable en 1 et, en prolongeant l'inégalité précédente (on fait tendre t vers 1) :

$$\boxed{\text{F est dérivable en 1 (à gauche), avec : } F'(1) \le \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j .}$$

c) • On a :

$$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) - \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1})$$

soit, finalement, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \ge 0$:

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \le \frac{F(t)-F(1)}{t-1}}$$

• La somme majorée étant finie, on peut donc écrire, par prolongement des inégalités (on fait tendre t vers 1 et l'on utilise la continuité des fonctions polynômes en 1 et la dérivabilité de F en 1) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} jp_j \le F'(1)}$$

• La suite $\left(\sum_{j=1}^{n} jp_j\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, np_n \ge 0$) et majorée (par F'(1)) elle converge et, par prolongement des inégalités, sa limite est majorée par F'(1), ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La somme } \sum jp_j \text{ converge et } \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \le F'(1)}$$

d) D'après les résultats des questions 3b et 3c, on peut écrire que F est derivable en 1, si et seulement si, la série $\sum jp_j$ converge et, sous l'une de ces hypothèses :

$$F'(1) \le \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \le F'(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La série } \sum jp_j \text{ converge si, et seulement si, F est dérivable en 1,} \\ \text{avec, dans ce cas : } F'(1) = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j\end{array}}$$