Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

PARTIE I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge. On définit pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j .$$

1) Etude de la fonction F sur [0,1]

a) Montrer que la série définissant $F(t)$ est convergente pour $0 \leq t \leq 1$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur $[0,1]$.
En déduire que F admet une limite à droite en tout point de $[0,1[$, et une limite à gauche en tout point de $]0,1]$ (on précisera le théorème utilisé).

c) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $[0,1[$.

- Etablir pour nombre réel t tel que $t_0 \leq t \leq 1$ et tout nombre entier naturel n :

$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leq \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j$$

- En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0.

d) Soit t_0 un nombre réel appartenant à $]0,1]$.
En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0, en conclure que F est continue sur $[0,1]$.

2) Etude locale de la fonction F en 0

a) Pour tout nombre entier naturel n, établir que, pour tout nombre réel t de [0,1] :

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j .$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

b) On considère la fonction ε_n définie sur $]0,1]$ par l'égalité suivante :

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \ldots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t) .$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre de n en 0, qui permet d'obtenir $p_0 \ldots, p_n$

3) Etude locale de la fonction F en 1.

a) Etablir pour tout nombre réel t de $[0,1[$:

$$\frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1}) .$$

En déduire que la fonction $t \to [F(t) - F(1)] / (t - 1)$ est croissante sur $[0,1[$.

b) On suppose dans cette question la série $\sum j p_j$ convergente.
Montrer que la fonction $t \to [F(t) - F(1)] / (t - 1)$ est alors majorée sur $[0,1[$, puis en déduire que la fonction F est dérivable en 1, et que :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j .$$

c) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.
Montrer que tout nombre réel t de $[0,1[$ et tout nombre entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (1 + t + \ldots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} .$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n \leq F'(1)$, puis établir que la série $\sum j p_j$ est convergente et comparer sa somme à $F'(1)$.

d) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si, et seulement si, la série $\sum j p_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à $F'(1)$.

e) *Application :* pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n.
A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique ? Comparer alors celle-ci à $F'(1)$.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

4) Produit de deux fonctions génératrices

Soient deux suites (p_n), (q_n) de nombres réels positifs telles que les séries $\sum p_n, \sum q_n$ convergent. On pose $r_n = p_0 q_n + \ldots + p_i q_{n-i} + \ldots + p_n q_0$ pour tout nombre entier naturel n.

a) Etablir pour tout entier naturel n la majoration suivante :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j . \sum_{j=0}^{n} q_j .$$

En déduire la convergence de la série $\sum r_n$.

b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0,1]$:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \ , \ G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \ , \ H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j .$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de $[0,1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \ \leq \ \sum_{j=0}^{n} p_j t^j . \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \ \leq \ \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j .$$

En déduire l'égalité $F(t).G(t) = H(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul) :

- il lance la pièce :
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à K+1 francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à K-1 francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par :

- R_k l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{ième}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_0(K) = 0$.

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

- $t \to F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie donc pour $0 \leq t \leq 1$ par :

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K) t^n .$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\sum p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier K=1

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

a) Calculer $p_1(1), p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer, pour tout nombre entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{ième}$ jet de la pièce si, et seulement si, il existe un entier j (où $1 \leq j \leq n-1$) tel que :

- à l'issue de premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
- à l'issue des n-j jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_0(1) = 0$) :

$$p\sum_{j=0}^{n} p_j(1) p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir à l'aide des résultats de I.4 la relation $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

d) Etudier les variations de la fonction $t \to 1 - 4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle $]0,1[$, et montrer que $1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.

En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $ptx^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes x'(t) et x"(t) (on supposera x'(t)<x"(t)).
Pour tout nombre réel t appartenant à $]0,1[$, montrer que x"(t)>1, puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

e) En faisant tendre t vers 1, déterminer alors $F_1(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur $p \leq 1/2$

Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque p=1/2 ?

3) Expression des probabilités $p_n(1)$

a) Rappeler le développement limité de la fonction $x \to (1+x)^{1/2}$ en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre 2m+1 de la fonction F_1 en 0.

b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel n $p_{2n}(1) = 0$ et :

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p(1-p)^{n+1}.$$

II.2 Etude du cas général

1) Etude de la probabilité de ruine du joueur

a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1.

A l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geq 2$.

$$p_n(1) = pp_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir la relation $F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$.

b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante :

$$P_n(K) = P \cdot P_{n-1}(K+1) + (1-p)P_{n-1}(K-1)$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, F_{K+1} et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

En étudiant alors la suite $K \to U_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.

c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

2) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$

Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p=1/2$?

3) Expression des probabilités $p_n(K)$

a) A l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a), établir que $p_{2n+1}(2) = 0$ puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout nombre entier naturel n.

b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geq 1$.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

Correction

Partie I.

1) a) La suite $(p_j)_j$ étant à termes positifs, on peut écrire :

$\forall t \in [0,1],\ \forall j \in \mathbb{N},\qquad 0 \leq p_j t^j \leq p_j$

Comme par hypothèse, la série $\sum p_j$ converge, il en découle, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum p_j t^j$ converge et donc :

$$\boxed{\text{La série définissant } F(t) \text{ est convergente pour } 0 \leq t \leq 1}$$

b) • Soit $(x,y) \in [0,1]^2$, $x<y$. La fonction $t \mapsto t^j$ $(j \in \mathbb{N})$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

$\forall j \in \mathbb{N},\ x^j \leq y^j$ donc, en multipliant par $p_j \geq 0$:

$\forall j \in \mathbb{N},\ p_j x^j \leq p_j y^j$ d'où, par sommation finie :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j y^j$.

Les suites $\left(\sum_{j=0}^{n} p_j x^j\right)_n$ et $\left(\sum_{j=0}^{n} p_j y^j\right)_n$ étant convergentes (cf. question 1a), on obtient alors, par prolongement des inégalités (on fait tendre n vers $+\infty$) :

$F(x) \leq F(y)$ d'où

$$\boxed{F \text{ est croissante sur } [0,1].}$$

• F étant monotone sur [0,1], on peut alors conclure, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\begin{array}{c}F \text{ admet une limite à droite en tout point de } [0,1[\\ \text{et une limite à gauche en tout point de }]0,1].\end{array}}$$

NB : F étant bornée sur [0,1] (par $F(0)=p_0$ et $F(1)$) ces limites sont finies.

c) • F étant croissante sur [0,1], on a, comme $0 \leq t_0 < t \leq 1$:

$F(t) - F(t_0) \geq 0$.

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

De plus, on a :

$F(t)-F(t_0)=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)$ d'où :

$\forall n\in\mathbb{N}, F(t)-F(t_0)=\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)+\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)$.

Or, comme : $\forall j\geq n+1$, $p_j(t^j-t_0^j)\leq p_j$, on peut écrire, par sommation finie puis par prolongement des inégalités (cf. question 1b) :

$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j(t^j-t_0^j)\leq\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j$ d'où :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq F(t)-F(t_0)\leq\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)+\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j}.$$

• Comme $\lim_{t\to t_0^+}\left(\sum_{j=0}^{n}p_j(t^j-t_0^j)\right)=0$ (par continuité des fonctions polynômes en t_0), la somme étant finie), on peut alors conclure, d'après le théorème de prolongement des inégalités (on fait tendre t vers t_0), F admettant une limite finie en t_0 à droite :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq\lim_{t\to t_0^+}F(t)-F(t_0)\leq\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j}$$

• On a :

$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j-\sum_{j=0}^{n}p_j$.

Or, comme la série $\sum p_j$ converge, on a :

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n}p_j=\sum_{j=0}^{+\infty}p_j$ d'où :

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=n+1}^{+\infty}p_j=0$ et donc, par prolongement des inégalités :

$0\leq\lim_{t\to t_0^+}F(t)-F(t_0)\leq 0$ donc :

$\lim_{t\to t_0^+}F(t)=F(t_0)$ soit finalement :

$$\boxed{F \text{ est continue à droite en } t_0}$$

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

d) F étant continue à droite en tout point de [0,1[et à gauche en tout point de]0,1], on peut conclure :

$$\boxed{\text{F est continue sur } [0,1].}$$

2) a) On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j \leq t^{n+1}$ donc, comme $\forall j \in \mathbb{N}, p_j \geq 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall j \geq n+1, \quad 0 \leq t^j p_j \leq t^{n+1} p_j$.

Par sommation finie, on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], \forall N \geq n+1, 0 \leq \sum_{j=n+1}^{N} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{N} p_j .$$

Les suites en présence étant convergentes, on peut finalement conclure, par prolongement des inégalités (on fait tendre N vers $+\infty$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1], 0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j .}$$

b) Par définition de $\mathcal{E}_n (n \in \mathbb{N})$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1], \ \mathcal{E}_n(t) = \frac{F(t) - \sum_{j=0}^{n} p_j t^j}{t^n} \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j .$$

Comme : $\forall t \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{t^n} \geq 0$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0,1], 0 \leq \mathcal{E}_n(t) \leq t$.

D'après le théorème de l'encadrement, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{t \to 0} \mathcal{E}_n(t) = 0}$$

3) a) • On a :

$$\forall t \in [0,1[, \quad F(t) - F(1) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j (t^j - 1) .$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

Or, d'après les résultats sur la somme des termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$, on a :

$\forall t \in [0,1[, \forall j \in \mathbb{N}^*,\ k^j - 1 = (t-1)\sum_{k=0}^{j-1} t^k$

Le terme de la somme égale à $F(t) - F(1)$ en j=0 étant nul, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1 + t + \ldots + t^{j-1})}$$

• En raisonnant comme à la question 1a, on montre :

$\forall (x,y) \in [0,1[, x < y \Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1 + x + \ldots + x^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1 + y + \ldots + y^{j-1})$ d'où :

$\forall (x,y) \in [0,1[, x < y \Rightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \leq \frac{F(y)-F(1)}{y-1}$.

Ainsi,

$$\boxed{t \mapsto \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \text{ est croissante sur } [0,1[.}$$

b) • On a :

$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[,\quad 1+t+\ldots+t^{j-1} \leq j$ d'où, la suite $(p_j)_j$ étant positive :

$\forall t \in [0,1[, \forall j \in \mathbb{N}^*, p_j(1 + t + \ldots + t^{j-1}) \leq jp_j$.

Par sommation finie et par prolongement des inégalités, il en découle :

$\forall t \in [0,1[, \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1 + t + \ldots + t^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j$.

D'après le résultat du 3a, on en conclut :

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \frac{F(t)-F(1)}{t-1} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j}$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{F(t)-F(1)}{t-1}$ étant croissante et majorée sur $[0,1[$, elle admet une limite finie à gauche en 1, donc F est dérivable en 1 et, en prolongeant l'inégalité précédente (on fait tendre t vers 1) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{F est dérivable en 1 (à gauche), avec :}\\ F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j\,.\end{array}}$$

c) • On a :

$$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) - \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1})$$

soit, finalement, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \geq 0$:

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} p_j(1+t+\ldots+t^{j-1}) \leq \frac{F(t)-F(1)}{t-1}}$$

• La somme majorée étant finie, on peut donc écrire, par prolongement des inégalités (on fait tendre t vers 1 et l'on utilise la continuité des fonctions polynômes en 1 et la dérivabilité de F en 1) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} jp_j \leq F'(1)}$$

• La suite $\left(\sum_{j=1}^{n} jp_j\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, np_n \geq 0$) et majorée (par F'(1)) elle converge et, par prolongement des inégalités, sa limite est majorée par F'(1), ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La somme } \sum jp_j \text{ converge et } \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \leq F'(1)}$$

d) D'après les résultats des questions 3b et 3c, on peut écrire que F est derivable en 1, si et seulement si, la série $\sum jp_j$ converge et, sous l'une de ces hypothèses :

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \leq F'(1)\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La série } \sum jp_j \text{ converge si, et seulement si, F est dérivable en 1,}\\ \text{avec, dans ce cas : } F'(1) = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j\end{array}}$$

Mathématiques

© EDUKLUB S.A. 2001
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 29 pages.