Triplets rectangulaires

– On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
  On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

– On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– On appelle *triplet rectangulaire* tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que $x^2 + y^2 = z^2$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces triplets.

Première partie

1. Calculer les inverses des matrices A, B, et C. [S]
2. Déterminer les Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   On notera en particulier que L est la seule de ces matrices qui soit symétrique. [S]
3. Prouver que $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{T}}MLM = L\}$ est un groupe multiplicatif. [S]
4. Montrer que les matrices de M de $\mathcal{G}$ sont caractérisées par la condition suivante :
   Pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$. [S]
5. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$. [S]
6. Vérifier que les six matrices A, B, C, J, K, L sont éléments de $\mathcal{H}$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des matrices particulières de $\mathcal{H}$.

On note $R_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ -2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix}$, $S_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & 2k^2 \\ 2k & -1 & -2k \\ -2k^2 & 2k & 1+2k^2 \end{pmatrix}$, et $\begin{cases} \mathcal{R} = \{R_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{S} = \{S_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

1. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, vérifier que les matrices R_k et S_k sont des éléments de $\mathcal{H}$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{H}$.
   Préciser R_k^m pour (k, m) dans $\mathbb{Z}^2$. [S]
3. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, montrer que la matrice $R_k - I$ est nilpotente. [S]
4. Déterminer trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ indépendantes de k, telle que, pour tout entier naturel n et tout k de $\mathbb{Z}$, on ait l'égalité : $R_k^n = a_n R_k^2 + b_n R_k + c_n I$. [S]
5. Montrer que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$. [S]
6. Pour tout k de $\mathbb{Z}$. Soit φ_k l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice S_k dans la base canonique.
   Identifier l'application φ_k et préciser ses éléments caractéristiques. [S]

Troisième partie

1. Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$, et M dans $\mathcal{H}$, tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   Montrer que $(|x'|, |y'|, |z'|) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (|x|, |y|, |z|) \in \mathcal{T}$. [S]
2. On se donne (x,y,z) dans $\mathcal{T}$, tel que $z > 1$, et on définit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier les inégalités $x > 0$, $y > 0$, et $0 < z' < z$. [S]
   (b) Montrer que l'un des triplets (x',y',z'), $(-x',y',z')$ ou $(x',-y',z')$ est dans $\mathcal{T}$.
   Indication : caractériser les inégalités $x' < 0$ et $y' < 0$ en fonction de x et y. [S]
3. (a) Montrer qu'on peut, au moyen de produits par A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}, transformer en un nombre fini d'étapes un triplet rectangulaire (x_0, y_0, z_0) quelconque en $(1,0,1)$. [S]
   (b) Appliquer cette méthode au triplet $(60, 91, 109)$.
   En déduire explicitement une matrice Q de $\mathcal{H}$ telle que $Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$. [S]
4. (a) Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathcal{T}$.
   Montrer qu'il existe au moins une matrice M de $\mathcal{H}$ telle que $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. [S]
   (b) Montrer que les M de $\mathcal{H}$ telles que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. [S]
   (c) En déduire toutes les matrices M de $\mathcal{H}$ qui vérifient l'égalité $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 91 \\ 109 \end{pmatrix}$.
   (on n'ira pas jusqu'à expliciter ces matrices.) [S]

Quatrième partie

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} - 7a_{n+2} + 7a_{n+1} - a_n = 0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. [S]
   (b) Donner une base de $\mathcal{E}$ formée de suites géométriques. [S]
2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes de $\mathcal{E}$.
   (a) La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = 0$. Calculer u_3 et u_4. [S]
   (b) La suite (v_n) définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_2 = 0$. [S]
   (c) La suite (w_n) définie par $w_0 = w_1 = 0$ et $w_2 = 1$. [S]
3. (a) Montrer que A^3 est une combinaison linéaire de I, A, A^2. [S]
   (b) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $A^n = u_n I + v_n A + w_n A^2$. [S]
4. Déterminer une application injective f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. On calcule l'inverse de A par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 12 & 6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On voit que $B = AK$ avec $K = K^{-1}$. Ainsi $B^{-1} = K^{-1}A^{-1} = KA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

De même $C = AJ$ donc $C^{-1} = J^{-1}A^{-1} = JA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. [Q]

2. On cherche Q sous la forme $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

La condition imposée s'écrit :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \\ a''x + b''y + c''z \end{pmatrix} \\ &= ax^2 + b'y^2 + c''z^2 + (b + a')xy + (c + a'')xz + (c' + b'')yz \end{aligned}$$

L'égalité est vraie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1, \ b' = 1, \ c'' = -1 \\ a' = -b, \ a'' = -c, \ b'' = -c' \end{cases}$

Les solutions sont donc les $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & -1 \end{pmatrix}$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

En particulier, la seule matrice symétrique solution est la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. [Q]

3. Montrons que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Tout d'abord I est dans $\mathcal{G}$.

Si M est dans $\mathcal{G}$, l'égalité ${}^{\mathrm{T}}MLM = L$ implique $(L\,{}^{\mathrm{T}}ML)M = L^2 = I$.

Toute matrice M de $\mathcal{G}$ est donc inversible, avec $M^{-1} = L\,{}^{\mathrm{T}}ML$. Ainsi $\mathcal{G} \subset \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.

Soient M et N deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$.

On a $L = {}^{\mathrm{T}}NLN = {}^{\mathrm{T}}N({}^{\mathrm{T}}MLM)N = ({}^{\mathrm{T}}N\,{}^{\mathrm{T}}M)L(MN) = {}^{\mathrm{T}}(MN)L(MN)$.

D'autre part ${}^{\mathrm{T}}MLM = L \Rightarrow LM = ({}^{\mathrm{T}}M)^{-1}L \Rightarrow L = {}^{\mathrm{T}}(M^{-1})LM^{-1}$.

Cela signifie que MN et M^{-1} sont dans $\mathcal{G}$.

Ainsi $\mathcal{G}$ est non vide, inclus dans $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et stable pour le produit des matrices ainsi que pour le passage à l'inverse. L'ensemble $\mathcal{G}$ est donc un sous-groupe de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. [Q]

4. Soit M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, posons comme l'indique l'énoncé $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   On constate qu'on a : $x'^2 + y'^2 - z'^2 = (\,x' \quad y' \quad z'\,)L\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\,x \quad y \quad z\,)\,{}^{\mathrm{T}}MLM\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   La condition $x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$ s'écrit donc $(\,x \quad y \quad z\,)\,{}^{\mathrm{T}}MLM\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2$.

   Mais la matrice $Q = {}^{\mathrm{T}}MLM$ est symétrique.

   Comme on l'a vu dans la question (2), dire que la condition précédente est vraie pour tout x,y,z de $\mathbb{R}$ équivaut donc à l'égalité ${}^{\mathrm{T}}MLM = L$, c'est-à-dire à l'appartenance de M au groupe $\mathcal{G}$. On obtient ainsi la caractérisation demandée des éléments de $\mathcal{G}$. [Q]

5. La matrice identité est dans $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Soient M, N deux éléments de $\mathcal{H}$.

   D'une part MN est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et dans $\mathcal{G}$ donc dans $\mathcal{H}$.

   D'autre part $M^{-1} = L\,{}^{\mathrm{T}}ML$ est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et dans $\mathcal{G}$ donc dans $\mathcal{H}$.

   Ainsi $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$. [Q]

6. On commence par vérifier que A (qui est symétrique) est dans $\mathcal{H}$.

$${}^{\mathrm{T}}ALA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = L.$$

   Les matrices J, K, L sont diagonales (donc commutent avec L) et symétriques.

   On en déduit ${}^{\mathrm{T}}JLJ = JLJ = J^2L = L$, ${}^{\mathrm{T}}KLK = KLK = K^2L = L$, et ${}^{\mathrm{T}}LLL = L^3 = L$.

   Ainsi J, K, L sont dans $\mathcal{H}$. Donc $B = AK$ et $C = AJ$ sont dans $\mathcal{H}$ (stabilité.) [Q]

Deuxième partie

1. Soit k un entier relatif. Tout d'abord R_k et S_k sont bien dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

   On constate ensuite que :

$${}^{\mathrm{T}}R_kLR_k = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & -2k^2 \\ -2k & 1 & -2k \\ 2k^2 & -2k & 1+2k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2k^2 & -2k & 2k^2 \\ 2k & 1 & -2k \\ 2k^2 & 2k & -1-2k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-2k^2)^2 + 4k^2 - 4k^4 & 2(2k^2-1)k + 2k - 4k^3 & 2(1-2k^2)k^2 - 4k^2 + 2k^2(1+2k^2) \\ 2(2k^2-1)k + 2k - 4k^3 & 1 & -4k^3 - 2k + 2k(1+2k^2) \\ 2(1-2k^2)k^2 - 4k^2 + 2(1+2k^2)k^2 & -4k^3 - 2k + 2(1+2k^2)k & 4k^4 + 4k^2 - (1+2k^2)(1+2k^2) \end{pmatrix}$$

   Après simplification, on trouve ${}^{\mathrm{T}}R_kLR_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = L$, donc R_k est dans $\mathcal{H}$.

   Enfin, il est clair que $S_k = R_kK$. Il en découle que S_k est également dans $\mathcal{H}$. [Q]

2. Posons $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Avec ces notations, on a $R_k = I + 2kU + 2k^2V$, pour tout k de $\mathbb{Z}$.

   On constate que $UV = VU = 0$, $U^2 = V$, $V^2 = 0$.