Triplets rectangulaires

– On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

– On définit les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&-2&2\\2&-2&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

– On appelle *triplet rectangulaire* tout triplet (x,y,z) d'entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que $x^2+y^2=z^2$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces triplets.

Première partie

1. Calculer les inverses des matrices A, B, et C. [S]
2. Déterminer les Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2-z^2=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}Q\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
On notera en particulier que L est la seule de ces matrices qui soit symétrique. [S]
3. Prouver que $\mathcal{G}=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^{\mathrm{T}}MLM=L\}$ est un groupe multiplicatif. [S]
4. Montrer que les matrices de M de $\mathcal{G}$ sont caractérisées par la condition suivante :
Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, si $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, alors $x'^2+y'^2-z'^2=x^2+y^2-z^2$. [S]
5. Montrer que $\mathcal{H}=\mathcal{G}\cap\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$. [S]
6. Vérifier que les six matrices A,B,C,J,K,L sont éléments de $\mathcal{H}$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie des matrices particulières de $\mathcal{H}$.

On note $R_k=\begin{pmatrix}1-2k^2&-2k&2k^2\\2k&1&-2k\\-2k^2&-2k&1+2k^2\end{pmatrix}$, $S_k=\begin{pmatrix}1-2k^2&2k&2k^2\\2k&-1&-2k\\-2k^2&2k&1+2k^2\end{pmatrix}$, et $\begin{cases}\mathcal{R}=\{R_k,\ k\in\mathbb{Z}\}\\\mathcal{S}=\{S_k,\ k\in\mathbb{Z}\}\end{cases}$

1. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, vérifier que les matrices R_k et S_k sont des éléments de $\mathcal{H}$. [S]
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{H}$.
Préciser R_k^m pour (k,m) dans $\mathbb{Z}^2$. [S]
3. Pour tout k de $\mathbb{Z}$, montrer que la matrice R_k-I est nilpotente. [S]
4. Déterminer trois suites $(a_n),(b_n),(c_n)$ indépendantes de k, telle que, pour tout entier naturel n et tout k de $\mathbb{Z}$, on ait l'égalité : $R_k^n=a_nR_k^2+b_nR_k+c_nI$. [S]
5. Montrer que $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$. [S]
6. Pour tout k de $\mathbb{Z}$. Soit φ_k l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice S_k dans la base canonique.
Identifier l'application φ_k et préciser ses éléments caractéristiques. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Troisième partie

1. Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$, et M dans $\mathcal{H}$, tels que $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
   Montrer que $(|x'|,|y'|,|z'|) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow (|x|,|y|,|z|) \in \mathcal{T}$. [S]
2. On se donne (x,y,z) dans $\mathcal{T}$, tel que $z>1$, et on définit $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier les inégalités $x>0$, $y>0$, et $0<z'<z$. [S]
   (b) Montrer que l'un des triplets (x',y',z'), $(-x',y',z')$ ou $(x',-y',z')$ est dans $\mathcal{T}$.
   Indication : caractériser les inégalités $x'<0$ et $y'<0$ en fonction de x et y. [S]
3. (a) Montrer qu'on peut, au moyen de produits par A^{-1},B^{-1},C^{-1}, transformer en un nombre fini d'étapes un triplet rectangulaire (x_0,y_0,z_0) quelconque en $(1,0,1)$. [S]
   (b) Appliquer cette méthode au triplet $(60,91,109)$.
   En déduire explicitement une matrice Q de $\mathcal{H}$ telle que $Q\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\91\\109\end{pmatrix}$. [S]
4. (a) Soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathcal{T}$.
   Montrer qu'il existe au moins une matrice M de $\mathcal{H}$ telle que $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. [S]
   (b) Montrer que les M de $\mathcal{H}$ telles que $M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont les matrices de $\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$. [S]
   (c) En déduire toutes les matrices M de $\mathcal{H}$ qui vérifient l'égalité $M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\91\\109\end{pmatrix}$.
   (on n'ira pas jusqu'à expliciter ces matrices.) [S]

Quatrième partie

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_{n+3}-7a_{n+2}+7a_{n+1}-a_n=0$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. [S]
   (b) Donner une base de $\mathcal{E}$ formée de suites géométriques. [S]
2. Donner l'expression du terme général des suites suivantes de $\mathcal{E}$.
   (a) La suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_1=u_2=0$. Calculer u_3 et u_4. [S]
   (b) La suite (v_n) définie par $v_0=0$, $v_1=1$ et $v_2=0$. [S]
   (c) La suite (w_n) définie par $w_0=w_1=0$ et $w_2=1$. [S]
3. (a) Montrer que A^3 est une combinaison linéaire de I,A,A^2. [S]
   (b) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $A^n=u_nI+v_nA+w_nA^2$. [S]
4. Déterminer une application injective f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Corrigé du problème

Première partie

1. On calcule l'inverse de A par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix}2&1&2&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\begin{pmatrix}2&1&2&1&0&0\\0&3&2&-1&2&0\\0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow 3L_1-L_2\\\\L_3\leftarrow 3L_3-L_2\end{matrix}\begin{pmatrix}6&0&4&4&-2&0\\0&3&2&-1&2&0\\0&0&1&-2&-2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1-4L_3\\L_2\leftarrow L_2-2L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}6&0&0&12&6&-12\\0&3&0&3&6&-6\\0&0&1&-2&-2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftarrow L_1/6\\L_2\leftarrow L_2/3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-2\\0&1&0&1&2&-2\\0&0&1&-2&-2&3\end{pmatrix}$$

On en déduit que la matrice A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$.

On voit que $B=AK$ avec $K=K^{-1}$. Ainsi $B^{-1}=K^{-1}A^{-1}=KA^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&-2&2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$.

De même $C=AJ$ donc $C^{-1}=J^{-1}A^{-1}=JA^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\1&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$. [Q]

2. On cherche Q sous la forme $Q=\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{pmatrix}$.
La condition imposée s'écrit :

$$x^2+y^2-z^2 = \begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\a'&b'&c'\\a''&b''&c''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ax+by+cz\\a'x+b'y+c'z\\a''x+b''y+c''z\end{pmatrix}$$

$$=ax^2+b'y^2+c''z^2+(b+a')xy+(c+a'')xz+(c'+b'')yz$$

L'égalité est vraie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\begin{cases}a=1,\ b'=1,\ c''=-1\\a'=-b,\ a''=-c,\ b''=-c'\end{cases}$

Les solutions sont donc les $Q=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\-\alpha&1&\gamma\\-\beta&-\gamma&-1\end{pmatrix}$, avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

En particulier, la seule matrice symétrique solution est la matrice $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. [Q]

3. Montrons que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Tout d'abord I est dans $\mathcal{G}$.

Si M est dans $\mathcal{G}$, l'égalité ${}^{\mathrm{T}}MLM=L$ implique $(L\,{}^{\mathrm{T}}ML)M=L^2=I$.

Toute matrice M de $\mathcal{G}$ est donc inversible, avec $M^{-1}=L\,{}^{\mathrm{T}}ML$. Ainsi $\mathcal{G}\subset\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.

Soient M et N deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$.

On a $L={}^{\mathrm{T}}NLN={}^{\mathrm{T}}N({}^{\mathrm{T}}MLM)N=({}^{\mathrm{T}}N\,{}^{\mathrm{T}}M)L(MN)={}^{\mathrm{T}}(MN)L(MN)$.

D'autre part ${}^{\mathrm{T}}MLM=L\Rightarrow LM=({}^{\mathrm{T}}M)^{-1}L\Rightarrow L={}^{\mathrm{T}}(M^{-1})LM^{-1}$.

Cela signifie que MN et M^{-1} sont dans $\mathcal{G}$.

Ainsi $\mathcal{G}$ est non vide, inclus dans $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et stable pour le produit des matrices ainsi que pour le passage à l'inverse. L'ensemble $\mathcal{G}$ est donc un sous-groupe de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. [Q]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

4. Soit M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, posons comme l'indique l'énoncé $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
On constate qu'on a : $x'^2+y'^2-z'^2 = \begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}L\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}{}^{\mathrm{T}}MLM\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
La condition $x'^2+y'^2-z'^2 = x^2+y^2-z^2$ s'écrit donc $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}{}^{\mathrm{T}}MLM\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2+y^2-z^2$.
Mais la matrice $Q = {}^{\mathrm{T}}MLM$ est symétrique.
Comme on l'a vu dans la question (2), dire que la condition précédente est vraie pour tout x,y,z de $\mathbb{R}$ équivaut donc à l'égalité ${}^{\mathrm{T}}MLM = L$, c'est-à-dire à l'appartenance de M au groupe $\mathcal{G}$. On obtient ainsi la caractérisation demandée des éléments de $\mathcal{G}$. [Q]

5. La matrice identité est dans $\mathcal{H} = \mathcal{G}\cap\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Soient M,N deux éléments de $\mathcal{H}$.
D'une part MN est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et dans $\mathcal{G}$ donc dans $\mathcal{H}$.
D'autre part $M^{-1} = L\,{}^{\mathrm{T}}ML$ est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et dans $\mathcal{G}$ donc dans $\mathcal{H}$.
Ainsi $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$. [Q]

6. On commence par vérifier que A (qui est symétrique) est dans $\mathcal{H}$.
$${}^{\mathrm{T}}ALA = \begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = L.$$
Les matrices J,K,L sont diagonales (donc commutent avec L) et symétriques.
On en déduit ${}^{\mathrm{T}}JLJ = JLJ = J^2L = L$, ${}^{\mathrm{T}}KLK = KLK = K^2L = L$, et ${}^{\mathrm{T}}LLL = L^3 = L$.
Ainsi J,K,L sont dans $\mathcal{H}$. Donc $B = AK$ et $C = AJ$ sont dans $\mathcal{H}$ (stabilité.) [Q]

Deuxième partie

1. Soit k un entier relatif. Tout d'abord R_k et S_k sont bien dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
On constate ensuite que :
$${}^{\mathrm{T}}R_kLR_k = \begin{pmatrix}1-2k^2 & 2k & -2k^2\\ -2k & 1 & -2k\\ 2k^2 & -2k & 1+2k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2k^2 & -2k & 2k^2\\ 2k & 1 & -2k\\ 2k^2 & 2k & -1-2k^2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(1-2k^2)^2+4k^2-4k^4 & 2(2k^2-1)k+2k-4k^3 & 2(1-2k^2)k^2-4k^2+2k^2(1+2k^2)\\ 2(2k^2-1)k+2k-4k^3 & 1 & -4k^3-2k+2k(1+2k^2)\\ 2(1-2k^2)k^2-4k^2+2(1+2k^2)k^2 & -4k^3-2k+2(1+2k^2)k & 4k^4+4k^2-(1+2k^2)(1+2k^2)\end{pmatrix}$$
Après simplification, on trouve ${}^{\mathrm{T}}R_kLR_k = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = L$, donc R_k est dans $\mathcal{H}$.
Enfin, il est clair que $S_k = R_kK$. Il en découle que S_k est également dans $\mathcal{H}$. [Q]

2. Posons $U = \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.
Avec ces notations, on a $R_k = I+2kU+2k^2V$, pour tout k de $\mathbb{Z}$.
On constate que $UV = VU = 0$, $U^2 = V$, $V^2 = 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.