Matrices et déterminants dépendant d'un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\begin{cases} a_{ij} = -1 \text{ si } j < i \\ a_{ij} = 0 \text{ si } j = i \\ a_{ij} = 1 \text{ si } j > i \end{cases}$. Donc $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Pour tout α de $\mathbb{C}$, on pose $M_n(\alpha) = A_n + \alpha I_n$ et $D_n(\alpha) = \det M_n(\alpha)$.

On note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice $M_n(\alpha)$ dans la base canonique.

Les parties I et II sont totalement indépendantes, et devront être traitées comme telles.

Première Partie

On note $u = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$.

Pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $\omega_k = \exp(2i\theta_k)$ et $\alpha_k = -i\,\text{cotan}\theta_k$.

1. Montrer que l'égalité $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0}$ équivaut au système $\begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$
   Vérifier que f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.
2. Pour tout α distinct de 1, on pose $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.
   (a) Montrer que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Vérifier que $q_\alpha^n = -1 \Leftrightarrow \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.
   (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \alpha_k$, avec $1 \leq k \leq n$.
   Montrer que $\ker f_{\alpha_k}$ est la droite engendrée par $u_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{n-1})$.
   (d) Préciser le rang de l'application f_α, suivant les valeurs de α.
3. On reprend ici les notations de la question précédente, et α est quelconque dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ forment une base de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Préciser la matrice de f_α dans cette base.
   (c) En déduire que le déterminant de f_α est égal à $\dfrac{(\alpha-1)^n + (\alpha+1)^n}{2}$.

Deuxième Partie

Dans cette partie, on voit deux méthodes distinctes de calcul de $D_n(\alpha)$.

1. (a) Calculer $D_1(\alpha)$ et $D_2(\alpha)$.
   Montrer que si $n \geq 3$, alors $D_n(\alpha) - 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha^2 - 1)D_{n-2}(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Pour tous complexes α et x, on pose $\Delta_n(\alpha, x) = \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$.
   (a) Montrer que $x \mapsto \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$ est une fonction affine de la variable x.
   (b) Retrouver l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que si $D_n(\alpha) = 0$ alors $D_{n-1}(\alpha) \neq 0$.
   (b) En déduire le rang de la matrice $M_n(\alpha)$ quand elle n'est pas inversible.
4. Dans cette question, on fixe $n \geq 1$, et on définit les θ_k et les α_k comme au début de la partie I.
   Montrer que les solutions de $D_n(\alpha) = 0$ sont les $\alpha_k = -i\,\text{cotan}\theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du problème

Première Partie

1. Soit U le vecteur-colonne représentant le vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   Il s'agit de résoudre la système $M_n(\alpha)U = 0$.

   On applique à $M_n(\alpha)$ les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, de $i = 1$ à $i = n-1$.

   On passe ainsi de $M_n(\alpha)$ à $M'_n(\alpha)$, avec :

   $$M_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & \alpha & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } M'_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

   On sait qu'il existe une matrice inversible P telle que $M'_n(\alpha) = PM_n(\alpha)$, car on a procédé à des opérations élémentaires sur les lignes.

   Il revient donc au même de résoudre le système $M'_n(\alpha)U = 0$.

   $$\text{Or } M'_n(\alpha)U = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1-\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha+1 & 1-\alpha \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)x_1 - (\alpha-1)x_2 \\ (\alpha+1)x_2 - (\alpha-1)x_3 \\ \vdots \\ (\alpha+1)x_{n-1} - (\alpha-1)x_n \\ \alpha x_n - x_1 - \dots - x_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On a donc l'équivalence : $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$.

   Si $\alpha = 1$, le système précédent donne $\begin{cases} 0 = 2x_{k-1} \text{ si } 2 \leq k \leq n \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = x_n \end{cases}$ donc $u = \overrightarrow{0}$.

   Autrement dit, l'application f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

2. (a) On sait que si $\alpha = 1$ alors $\ker f_\alpha = \{\overrightarrow{0}\}$.

   Pour trouver les α tels que $\ker f_\alpha \neq \{\overrightarrow{0}\}$, on peut donc supposer $\alpha \neq 1$.

   Les égalités $(\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1}$ $(2 \leq k \leq n)$ s'écrivent alors $x_k = q_\alpha\, x_{k-1}$.

   Ces égalités donnent immédiatement : $\forall\, k \in \{1, \dots, n\},\ x_k = q_\alpha^{k-1} x_1$.

   L'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \alpha x_n$ s'écrit alors $x_1(1 + q_\alpha + \dots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_n$.

   On note que $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} \neq 1$ et que réciproquement $\alpha = \dfrac{q_\alpha+1}{q_\alpha-1}$.

   Dans ces conditions :

   $$x_1(1 + q_\alpha + \dots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha\, q_\alpha^{n-1} x_1 \quad \Leftrightarrow x_1 \frac{q_\alpha^{n-1} - 1}{q_\alpha - 1} = \frac{(q_\alpha+1)q_\alpha^{n-1}}{q_\alpha - 1}\, x_1$$
   $$\Leftrightarrow (q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$$

   En résumé, $f_\alpha(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u = x_1(1, q_\alpha, \dots, q_\alpha^{n-1})$ avec $(q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$.

   On constate que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors $x_1 = 0$, puis $x_2 = \dots = x_n = 0$.

   Autrement dit, si $q_\alpha^n \neq -1$, $\ker f_\alpha = \{\overrightarrow{0}\}$ donc f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.