CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 12 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est un entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.
On suppose qu'à l'instant initial, $(t = 0)$, une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.
Dans tout le problème n désignera un entier naturel sans qu'il soit besoin de le rappeler à chaque fois.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$, et la fonction $\ln$ représentera la fonction logarithme népérien.
La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Propagation déterministe

A
Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \dfrac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit $\mathbb{N}$. Pour tout n, on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.
On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C.\Delta.(1 - u_n(\Delta))$$

On pose : $u_0(\Delta) = \dfrac{1}{N}$.

1) Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\Delta)$.

2) Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\dfrac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ.

a) Comparer $[\frac{t}{\Delta}]\Delta$, t et $\left([\frac{t}{\Delta}]+1\right)\Delta$. Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta[\frac{t}{\Delta}]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\Delta\to 0} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.