Racines carrées dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ lorsque la dimension de E est finie

ENSI M 1988, (Math 2)

Notations :
Dans tout le problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.

- E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E. On note O l'endomorphisme nul et e l'endomorphisme identité de E.
- $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré au plus n.
- Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on désigne par
  - ◇ $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f,
  - ◇ $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des "racines carrées de f" dans $\mathcal{L}(E)$: $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$,
  - ◇ $\widetilde{P}(f)$ l'endomorphisme de E défini par $\widetilde{P}(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = e$).
- F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $p_{F,G}$ de E tel que : $\forall (x, y) \in F \times G,\ p_{F,G}(x+y) = x$.
- $\mathbb{N}_n$ est le sous-ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ de $\mathbb{N}^*$.

Partie I

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q tels que

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} p + q = e \\ ap + bq = f \end{cases}$$

[I] [S] **I.1)** Calculer $(f - ae)(f - be)$. En déduire que f est diagonalisable.

[I] [S] **I.2) a)** Établir que $pq = qp = O$, $p^2 = p$, $q^2 = q$.

b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

c) On suppose que $ab \neq 0$. Montrer que f est bijective et que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f^m = a^m p + b^m q.$$

[I] [S] **I.3)** Montrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - ae)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - be)$ et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - be)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - ae)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

[I] [S] **I.4)** On note F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q.

a) Montrer que F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner la dimension.

b) Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.

c) Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

[I] [S] **I.5)** *Exemple :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$. En déduire A^m en fonction de I_3 et J.

b) Montrer qu'il existe deux couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = a^m B + b^m C$.

c) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

Partie II

Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une famille de n endomorphismes non nuls de E, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n nombres complexes dintincts, et f un endomorphisme de E tel que, pour tout entier naturel m, $f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$.

[I] [S] **II.1)** Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \widetilde{P}(f) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}(x_k) p_k$.

[I] [S] **II.2)** On pose $\Pi = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\Pi_l = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n}(X - x_k)$ et $L_l = \dfrac{\Pi_l}{\widetilde{\Pi}_l(x_l)}$.

a) Calculer $\widetilde{\Pi}(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad p_k = \widetilde{L}_k(f)$. Vérifier que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2, \quad p_k p_l = \delta_{kl} p_k$ où δ_{kl} est le symbole de Kronecker.

c) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$.

[I] [S] **II.3)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, p_k est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - x_k e)$ parallèlement à $V_k = \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \mathrm{Ker}(f - x_l e)$.

[I] [S] **II.4)** On désigne par F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Déterminer le cardinal de $\mathcal{R}(f) \cap F$.

c) Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ? (On précisera le nombre de ces projecteurs ainsi que leurs éléments caractéristiques)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

[I] [S] **II . 5)** On suppose ici que $n = N$.

a) Montrer que $\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad gf = fg \iff g \in F$.

b) Quel est le cardinal de $\mathcal{R}(f)$?

[I] [S] **II . 6)** Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\mathrm{Sp}(h) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}_n\}$. Montrer qu'il existe une famille $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de n endomorphismes non nuls de E , tels que $\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$.

[I] [S] **II . 7)** *Exemple* : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres x_1 , x_2 , x_3 de A .

b) Calculer L_1 , L_2 , L_3 et expliciter les matrices $P_1 = \widetilde{L}_1(A)$, $P_2 = \widetilde{L}_2(A)$ et $P_3 = \widetilde{L}_3(A)$.

c) Déterminer explicitement les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = O$ et $u^{n-1} \neq O$.

[I] [S] **III . 1)** **a)** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que famille $\left(u^{k-1}(x)\right)_{k \in \mathbb{N}_n}$ soit libre.

b) Établir que $\forall P \in \mathbb{C}[X], \widetilde{P}(u) = O \iff X^n$ divise P .

c) Montrer que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset \Longrightarrow n \leqslant \dfrac{N+1}{2}$.

[I] [S] **III . 2)** **a)** Déterminer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que pour tout réel $x \in]-1, 1[$, $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

b) Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Montrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

[I] [S] **III . 3)** On prend dans toute la suite $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on pose $Q_{n,\omega} = \omega\, P_n\left(\dfrac{X}{\omega^2}\right)$.

a) Montrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$ est $\{Q_{n,\omega}, -Q_{n,\omega}\}$.

b) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) \neq \emptyset$.

[I] [S] **III . 4)** On suppose ici que $n = N$ et on choisit $x \in E$ comme en III.1.a. Soit $g \in \mathcal{R}(\omega^2 e + u)$.

a) Montrer que g commute avec u .

b) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g(x) = \widetilde{P}(u)(x)$. Établir que $g = \widetilde{P}(u)$.

c) Montrer que $\mathcal{R}(\omega^2 e + u) = \{\widetilde{Q}_{n,\omega}(u), -\widetilde{Q}_{n,\omega}(u)\}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

[I] [S] **III . 5)** *Application* : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(A)$.

[I] [S] **III . 6)** On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Montrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

[I] [S] **III . 7)** **a)** Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Trouver la forme générale des éléments de $\mathcal{R}(A)$.

Partie IV

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit $P_f = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\alpha_k}$ où les x_k sont les valeurs propres de f deux à deux distinctes et les α_k leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \operatorname{Ker}(f - x_k e)^{\alpha_k}$ et on rappelle que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

[I] [S] **IV . 1)** **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Φ_f tel que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\widetilde{P}(f) = O$ soit exactement l'ensemble des multiples de Φ_f dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Montrer que $\Phi_f = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 2)** Montrer que si $g \in \mathcal{R}(f)$ alors $g < E_k > \subset E_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

[I] [S] **IV . 3)** **a)** Montrer que $x_1 = 0$ et $\beta_1 > \dfrac{\alpha_1 + 1}{2} \Longrightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset$.

b) Montrer que $0 \notin \operatorname{Sp}(f) \Longrightarrow \mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

c) Montrer que si $x_1 = 0$ et $\beta_1 \geqslant 2$ alors ou bien $\mathcal{R}(f) = \emptyset$ ou bien $\mathcal{R}(f)$ admet une infinité d'éléments.

[I] [S] **IV . 4)** On suppose ici que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.

a) Montrer que $0 \notin \operatorname{Sp}(f) \Longrightarrow \operatorname{Card} \mathcal{R}(f) = 2^n$.

b) Montrer que $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1 \Longrightarrow \operatorname{Card} \mathcal{R}(f) = 2^{n-1}$.

♦ ♦ ♦

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Indications ou résultats

Partie I

[Q] **I.1)** $(f-ae)(f-be)=O$.

[Q] **I.2)** **a)** Résoudre le système $\begin{cases} p+q=e \\ ap+bq=f \end{cases}$ par rapport aux inconnues p et q.

b) Les racines d'un polynôme annulateur de f sont valeurs propres de f. Justifier que a et b sont effectivement valeurs propres de f.

c) Montrer que $f^{-1}=a^{-1}p+b^{-1}q$.

[Q] **I.3)** Utiliser I.1 et I.2.b.

[Q] **I.4)** **a)** Le sous-espace F est stable par produit. Montrer que (p,q) est libre.

b) On trouve les quatre projecteurs O, p, q et e.

c) On trouve quatre racines carrées pour f si $ab\neq 0$ et deux si $ab=0$.

[Q] **I.5)** **a)** $J^m=3^{m-1}J$ si $m\in\mathbb{N}^*$, puis $A^m=I_3+(4^m-1)\dfrac{J}{3}$.

b) $B=I_3-\dfrac{J}{3}$, $C=\dfrac{J}{3}$, $a=1$ et $b=4$.

c) Ce sont les quatre matrices $\pm B\pm 2C$.

Partie II

[Q] **II.1)** Pour $P=\sum_{m=0}^{d}a_mX^m\in\mathbb{C}[X]$, permuter les sommes $\sum_{m=0}^{d}$ et $\sum_{k=1}^{n}$ dans $\widetilde{P}(f)$.

[Q] **II.2)** **a)** Appliquer II.1. En déduire que f est diagonalisable.

b) Utiliser la relation $\widetilde{L}_k(x_l)=\delta_{kl}$ et II.1.

c) Justifier d'abord l'inclusion $\mathrm{Sp}(f)\subset\{x_k \mid k\in\mathbb{N}_n\}$ puis remarquer l'égalité $(f-x_ke)p_k=O$ pour l'inclusion inverse.

[Q] **II.3)** Utiliser II.1 (f est diagonalisable) et II.2.c ce qui donne $E=\bigoplus_{k=1}^{n}\mathrm{Ker}(f-x_ke)$. Conclure avec II.2.b.

[Q] **II.4)** **a)** $\dim F=n$.

b) $\mathrm{Card}(\mathcal{R}(f)\cap F)=2^n$ si $O\notin\mathrm{Sp}(f)$ et 2^{n-1} si $0\in\mathrm{Sp}(f)$.

c) Il y a autant de projecteurs dans F que de choix de parties dans $\mathrm{Sp}(f)$, c'est à dire 2^n.

[Q] **II.5)** **a)** Montrer que F est un sous-espace de l'espace des endomorphismes commutant avec f et que ce dernier espace est de dimension $\dim E=N=n=\dim F$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.