Séries associées à la fonction ζ . Formule des compléments.

d'après le Concours des Mines 1996

Soit ζ la fonction définie sur la demi-droite réelle ouverte $]1\,,\,+\infty[$ par la relation :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\cdot$$

Il est admis que cette fonction est continue sur $]1\,,\,+\infty[$.
L'objet de ce problème est de caractériser, sur l'intervalle $I =]-1\,,\,1]$, la somme $F(x)$ de la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$, $k \geqslant 2$; elle est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k.$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ. L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fonctionnelle est établie à la troisième partie.
Dans tout le texte nous usons des notations suivantes :

- pour tout entier naturel k, φ_k désigne la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0\,,\,+\infty[$ par la relation : $\varphi_k(x) = \dfrac{[x]}{x^{k+1}}\cdot$ L'expression $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x ; c'est l'entier naturel vérifiant la double inégalité : $[x] \leqslant x < [x]+1$.
- pour tout entier $k \geqslant 2$, S_k et T_k désignent les intégrales ci-dessous :

$$S_k = \int_1^{+\infty} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad T_k = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Partie I

1) Existence et calcul de S_k [I] [S]

a) Justifier l'intégrabilité de φ_k pour tout entier $k \geqslant 2$.

b) Exprimer le réel S_k à l'aide de $\zeta(k)$ en considérant, par exemple, la série de terme général $f_n(k) = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x$ $\big((n\,,\,k) \in \mathbb{N}^{*2},\ k \geqslant 2\big)$.

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$ [I] [S]

a) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k T_k$ est absolument convergente.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

b) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$, est convergente.
Soient S et T les sommes de ces séries :

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k S_k \ ; \ T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k \, .$$

c) Déterminer la relation qui lie S et T ; la relation $\ln 2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$ est admise.

3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [I] [S]

Soit φ la fonction définie sur la demi-droite fermée $[2\,,\,+\infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2(1+x)} \, .$$

Justifier que φ est intégrable sur la demi-droite $[2\,,\,+\infty[$ et exprimer le réel T en fonction de $\int_2^{+\infty} \varphi$.

4) Calcul de S [I] [S]

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des réels définis par la relation : $h_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

a) Établir la convergence de la série de terme général h_n. Soit H la somme de la série : $H = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

b) Déduire des résultats des questions 2.c) et 3) l'égalité entre les deux réels H et S.

Soit $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par la relation : $c_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$.

c) En exprimant, par exemple, h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, montrer que la suite c est convergente et calculer H à l'aide de la constante d'Euler $\gamma = \lim c$.
En déduire la valeur de $F(1)$ où F est la fonction définie dans le préambule.

Partie II

1) Fonctions U_n , $n \in \mathbb{N}^*$ [I] [S]

a) Considérons pour un entier naturel n donné, $n \geqslant 1$, et un réel x donné, la série de terme général $u_k(n,x) = \frac{1}{k}\left(-\frac{x}{n}\right)^k$ $(k \geqslant 2)$.
Déterminer l'ensemble J_n des réels x pour lesquels la série de terme général $u_k(n,x)$ $k \geqslant 2$, est convergente.

Soit U_n la fonction définie sur J_n par la relation : $U_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(n,x)$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

b) Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.

c) Pour un réel x donné, vérifier qu'il existe un entier N tel que $x \in \bigcap_{n=N}^{+\infty} J_n$.

Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.

2) Étude de la fonction F [I] [S]

a) Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x > 1$, $1 < \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

b) Déterminer l'ensemble I des réels x pour lesquels la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k$, $(k \geqslant 2)$ est convergente.
I est ainsi l'ensemble de définition de la fonction F définie dans le préambule.

3) Convergence de la série $\sum U_n(x)$ vers $F(x)$ [I] [S]

a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle I. Démontrer que la série de terme général $U_n(x)$, $(n \geqslant 1)$, définie à la question II-1.a), converge et a pour somme $F(x)$.

b) Démontrer que l'application F est continue sur I.
Pour tout entier n strictement positif on nomme G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-1, +\infty[$, par la relation :

$$G_n(x) = \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

4) Limite de la suite de terme général $G_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ [I] [S]

En utilisant les résultats des questions I-4) et II-3.b), démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, la suite de terme général $\ln\big(Gn(x)\big)$, $n \geqslant 1$, est convergente.
En déduire que pour tout $x \in I$, la suite $\big(G_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers $G(x)$ où G est une application continue sur I que l'on précisera.

Partie III

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$, et T l'application de E dans E définie par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in]0,1[,\ T(f)(x) = f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big).$$

1) Deux fonctions propres pour T [I] [S]

Vérifier que T est un endomorphisme de E admettant pour vecteurs propres remarquables pour la valeur propre 2 les fonctions u et v de E définies par

$$\forall x \in]0,1[,\ u(x) = \operatorname{cotan} \pi x \quad \text{et} \quad v(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

2) Fonctions f continues sur $[0\,,\,1]$ vérifiant $T(f)=2f$ [I] [S]

f désigne dans cette question une fonction de E, prolongeable en une fonction continue $\overline{f}$ sur $[0\,,\,1]$, telle que $T(f)=2f$.

a) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0\,,\,1]$ tel que $f(x_0)=M$ soit le maximum de $\overline{f}$ et qu'alors $\overline{f}\left(\dfrac{x_0}{2}\right)=M$.

b) En déduire que la fonction $\overline{f}$ atteint son maximum et son minimum au point 0. Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

3) Développement Eulérien de cotan πx [I] [S]

a) Comment choisir le réel a pour que la fonction $f=v-au$ soit prolongeable en une application $\widetilde{f}$ 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$?

b) Déduire de III-1), 2.b) et 3.a) l'identité suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,,\quad \frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2}=\pi\operatorname{cotan}\pi x\,.$$

4) Formule des compléments [I] [S]

a) Par une intégration convenable montrer la relation

$$\forall\, x \in]0\,,\,1[\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right).$$

b) En déduire la relation

$$\forall\, x \in]0\,,\,1[\,,\quad G(x)G(1-x)=\frac{\pi x(1-x)}{\sin\pi x}\,.$$

c) En déduire que $\displaystyle F\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k2^k}\,\zeta(k)=\frac{\gamma}{2}+\frac{\ln\pi}{2}-\ln 2\,.$

♦ ♦
♦

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Indications ou résultats

Partie I

1) Existence et calcul de S_k [Q]

a) Dominer $|\varphi_k|$ par une fonction de Riemann intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$.

b) $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(k) = \dfrac{\zeta(k)}{k}\cdot$

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$ [Q]

a) $|T_k| = \displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi_k(x)dx \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\cdot$

b) $S_k = T_k + \displaystyle\int_1^2 \varphi_k(x)dx = T_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k2^k}\cdot$ La série $\sum(-1)^k S_k$ est combinaison linéaire de 3 séries convergentes.

c) Utiliser la formule connue $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ sur l'intervalle $]-1\,,\,1]$ pour les valeurs $x=1$ et $x=\dfrac{1}{2}\cdot$ $\quad S = T + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot$

3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [Q]

$T = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k T_k = \int_2^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$

4) Calcul de S [Q]

a) $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}\cdot$

b) Décomposer $\dfrac{1}{x^2(1+x)}$ pour obtenir $T = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(h_n - h_{n+1}) = H - (h_1 - h_2)$. Déduire de 2.c) que $S = H$.

c) $\gamma = H = S = F(1)$.

Partie II

1) Fonctions U_n, $n \in \mathbb{N}^*$ [Q]

a) Règle de d'Alembert et théorème des séries alternées. $\quad J_n =]-n\,,\,n]$.

b) Pour $x \in J_n$, $U_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

c) $U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}\cdot$

2) Étude de la fonction F [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.