

Séries associées à la fonction ζ . Formule des compléments.

d'après le Concours des Mines 1996

Soit ζ la fonction définie sur la demi-droite réelle ouverte $]1, +\infty[$ par la relation :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Il est admis que cette fonction est continue sur $]1, +\infty[$.

L'objet de ce problème est de caractériser, sur l'intervalle $I =]-1, 1]$, la somme $F(x)$ de la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)x^k$, $k \geq 2$; elle est définie par la relation :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)x^k.$$

Dans la première partie un calcul explicite donne la valeur de $F(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ . L'objet de la deuxième partie est d'exprimer la somme $F(x)$ lorsque le réel x appartient à l'intervalle I en fonction de la constante d'Euler et d'une fonction G dont une propriété fonctionnelle est établie à la troisième partie.

Dans tout le texte nous usons des notations suivantes :

- pour tout entier naturel k , φ_k désigne la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, +\infty[$ par la relation : $\varphi_k(x) = \frac{[x]}{x^{k+1}}$. L'expression $[x]$ désigne la partie entière du réel positif x ; c'est l'entier naturel vérifiant la double inégalité : $[x] \leq x < [x] + 1$.
- pour tout entier $k \geq 2$, S_k et T_k désignent les intégrales ci-dessous :

$$S_k = \int_1^{+\infty} \varphi_k(x) dx, \quad T_k = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x) dx.$$

Partie I

1) Existence et calcul de S_k

[I]
[S]

a) Justifier l'intégrabilité de φ_k pour tout entier $k \geq 2$.

b) Exprimer le réel S_k à l'aide de $\zeta(k)$ en considérant, par exemple, la série de terme général

$$f_n(k) = \int_n^{n+1} \varphi_k(x) dx \quad ((n, k) \in \mathbb{N}^{*2}, k \geq 2).$$

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$

[I]
[S]

a) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k T_k$ est absolument convergente.

- b) Démontrer que la série de terme général $(-1)^k S_k$, est convergente.
Soient S et T les sommes de ces séries :

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k S_k ; T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k .$$

- c) Déterminer la relation qui lie S et T ; la relation $\ln 2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$ est admise.

- 3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [I] [S]

Soit φ la fonction définie sur la demi-droite fermée $[2, +\infty[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{[x]}{x^2(1+x)} .$$

Justifier que φ est intégrable sur la demi-droite $[2, +\infty[$ et exprimer le réel T en fonction de $\int_2^{+\infty} \varphi$.

- 4) Calcul de S [I] [S]

Soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des réels définis par la relation : $h_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

- a) Établir la convergence de la série de terme général h_n . Soit H la somme de la série :

$$H = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n .$$

- b) Dédurre des résultats des questions 2.c) et 3) l'égalité entre les deux réels H et S.

Soit $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par la relation : $c_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln n$.

- c) En exprimant, par exemple, h_n à l'aide de l'expression $c_{n+1} - c_n$, montrer que la suite c est convergente et calculer H à l'aide de la constante d'Euler $\gamma = \lim c$.

En déduire la valeur de $F(1)$ où F est la fonction définie dans le préambule.

Partie II

- 1) Fonctions $U_n, n \in \mathbb{N}^*$ [I] [S]

- a) Considérons pour un entier naturel n donné, $n \geq 1$, et un réel x donné, la série de terme général $u_k(n, x) = \frac{1}{k} \left(-\frac{x}{n}\right)^k$ ($k \geq 2$).

Déterminer l'ensemble J_n des réels x pour lesquels la série de terme général $u_k(n, x)$ $k \geq 2$, est convergente.

Soit U_n la fonction définie sur J_n par la relation : $U_n(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(n, x)$.

b) Exprimer $U_n(x)$ au moyen de fonctions élémentaires.

c) Pour un réel x donné, vérifier qu'il existe un entier N tel que $x \in \bigcap_{n=N}^{+\infty} J_n$.

Déterminer deux réels A et α tels que $U_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$.

2) Étude de la fonction F [I] [S]

a) Démontrer l'encadrement : pour tout réel $x > 1$, $1 < \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.

b) Déterminer l'ensemble I des réels x pour lesquels la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)x^k$, ($k \geq 2$) est convergente.

I est ainsi l'ensemble de définition de la fonction F définie dans le préambule.

3) Convergence de la série $\sum U_n(x)$ vers $F(x)$ [I] [S]

a) Soit x un réel appartenant à l'intervalle I . Démontrer que la série de terme général $U_n(x)$, ($n \geq 1$), définie à la question II-1.a), converge et a pour somme $F(x)$.

b) Démontrer que l'application F est continue sur I .

Pour tout entier n strictement positif on nomme G_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $] -1, +\infty[$, par la relation :

$$G_n(x) = \frac{n! n^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}.$$

4) Limite de la suite de terme général $G_n(x)$ ($n \geq 1$) [I] [S]

En utilisant les résultats des questions I-4) et II-3.b), démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I , la suite de terme général $\ln(G_n(x))$, $n \geq 1$, est convergente.

En déduire que pour tout $x \in I$, la suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers $G(x)$ où G est une application continue sur I que l'on précisera.

Partie III

Soit E l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications continues de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} , et T l'application de E dans E définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in]0, 1[, T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

1) Deux fonctions propres pour T [I] [S]

Vérifier que T est un endomorphisme de E admettant pour vecteurs propres remarquables pour la valeur propre 2 les fonctions u et v de E définies par

$$\forall x \in]0, 1[, u(x) = \cotan \pi x \quad \text{et} \quad v(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k}.$$

2) Fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $T(f) = 2f$ [I] [S]

f désigne dans cette question une fonction de E , prolongeable en une fonction continue \bar{f} sur $[0, 1]$, telle que $T(f) = 2f$.

a) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = M$ soit le maximum de \bar{f} et qu'alors $\bar{f}\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$.

b) En déduire que la fonction \bar{f} atteint son maximum et son minimum au point 0. Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

3) Développement Eulérien de $\cotan \pi x$ [I] [S]

a) Comment choisir le réel a pour que la fonction $f = v - au$ soit prolongeable en une application \tilde{f} 1-périodique sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} ?

b) Déduire de III-1), 2.b) et 3.a) l'identité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \cotan \pi x.$$

4) Formule des compléments [I] [S]

a) Par une intégration convenable montrer la relation

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right).$$

b) En déduire la relation

$$\forall x \in]0, 1[, \quad G(x)G(1-x) = \frac{\pi x(1-x)}{\sin \pi x}.$$

c) En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k2^k} \zeta(k) = \frac{\gamma}{2} + \frac{\ln \pi}{2} - \ln 2$.



Indications ou résultats

Partie I

1) Existence et calcul de S_k [Q]

a) Dominer $|\varphi_k|$ par une fonction de Riemann intégrable sur $[1, +\infty[$.

b)
$$S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(k) = \frac{\zeta(k)}{k}.$$

2) Convergence des séries de termes généraux $(-1)^k S_k$, et $(-1)^k T_k$ [Q]

a)
$$|T_k| = \int_2^{+\infty} \varphi_k(x) dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

b)
$$S_k = T_k + \int_1^2 \varphi_k(x) dx = T_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k2^k}.$$
 La série $\sum (-1)^k S_k$ est combinaison linéaire de 3 séries convergentes.

c) Utiliser la formule connue $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ sur l'intervalle $] -1, 1]$ pour les valeurs $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$.
$$S = T + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}.$$

3) Expression de T à l'aide d'une intégrale [Q]

$$T = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k T_k = \int_2^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

4) Calcul de S [Q]

a)
$$h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

b) Décomposer $\frac{1}{x^2(1+x)}$ pour obtenir $T = \sum_{n=2}^{+\infty} n(h_n - h_{n+1}) = H - (h_1 - h_2)$. Déduire de

2.c) que $S = H$.

c) $\gamma = H = S = F(1)$.

Partie II

1) Fonctions $U_n, n \in \mathbb{N}^*$ [Q]

a) Règle de d'Alembert et théorème des séries alternées. $J_n =]-n, n]$.

b) Pour $x \in J_n, U_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

c)
$$U_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}.$$

2) Étude de la fonction F [Q]