Endomorphismes normaux, symétriques, ou antisymétriques

Notations

Dans ce problème, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs quelconques x, y de E.
On note $[x]_\varepsilon$ la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base (ε) de E.
Rappel : si (ε) est orthonormée, si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k \varepsilon_k$, $(x \mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\text{t}}[x]_\varepsilon [y]_\varepsilon$.

Première partie

Dans cette partie, on définit ce qu'est l'adjoint d'un endomorphisme de E.

1. (a) Soit φ une forme linéaire sur E.
   Montrer qu'il existe un vecteur unique a de E tel que : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = (x \mid a)$. [S]

   (b) Soit f un endomorphisme quelconque de E, et soit y un vecteur de E.
   Montrer qu'il existe un unique a de E tel que : $\forall x \in E,\ (f(x) \mid y) = (x \mid a)$. [S]

   (c) Avec les notations précédentes, on note $a = f^*(y)$.
   Montrer que l'application f^* ainsi définie est un endomorphisme de E. [S]

Pour tout endomorphisme f de E, on a ainsi défini un endomorphisme f^* de E.
On a vu que l'application f^* est *caractérisée* par : $\forall (x, y) \in E^2,\ (f(x) \mid y) = (x \mid f^*(y))$.
On dit que f^* est l'endomorphisme *adjoint* de f.

2. (a) Soit (ε) une base orthonormée quelconque de E.
   Montrer que la matrice de f^* dans la base (ε) est la transposée de celle de f. [S]

   (b) Soit f dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que f, f^* ont même rang, même trace, même déterminant. [S]

3. (a) Montrer que l'application $f \mapsto f^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$. [S]

   (b) Montrer que pour tous f, g de $\mathcal{L}(E)$, on a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. [S]

   (c) Dans cette question, on suppose que f est un automorphisme de E.
   Vérifier que $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$, et montrer que f^* est un automorphisme, avec $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. [S]

4. (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par l'endomorphisme f.
   Montrer que son supplémentaire orthogonal $F^\perp$ est lui aussi stable par f^*. [S]

   (b) Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, Montrer que $\mathrm{Ker} f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ puis que $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.
   Indiquer comment ce résultat permet de retrouver l'égalité $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$. [S]

Quelques définitions

On dit qu'un endomorphisme f de E est :
- *Normal* s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire si $f^* \circ f = f \circ f^*$.
- *Symétrique* si $f^* = f$, c'est-à-dire si $(f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$ pour tous x, y de E.
- *Antisymétrique* si $f^* = -f$, c'est-à-dire si $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$ pour tous x, y de E.

On note $\mathcal{N}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(E)$, resp. $\mathcal{A}(E)$) l'ensemble des endomorphismes normaux (resp. symétriques, resp. antisymétriques) de E.

Il est clair que les endomorphismes symétriques ou antisymétriques sont normaux.

Deuxième partie

On étudie ici certaines propriétés des endomorphismes normaux, symétriques ou antisymétriques.
Dans les questions (1) à (3), on désigne par f un endomorphisme quelconque de E.

1. (a) Montrer que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$. [S]

   (b) Soit f un endomorphisme de E, de matrice M dans une base orthonormée (ε) de E.
   Montrer que l'endomorphisme f est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si la matrice M est symétrique (resp. antisymétrique). [S]

   (c) Préciser les dimensions respectives de $\mathcal{S}(E)$ et de $\mathcal{A}(E)$. [S]

   (d) Montrer que $\mathcal{N}(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $n \geq 2$. [S]

   (e) Soit f un endomorphisme quelconque de E.
   Soit $f = g + h$ la décomposition de f sur la somme directe $\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$.
   Montrer que f est normal si et seulement si les endomorphismes g et h commutent. [S]

2. (a) Dans cette question seulement, on suppose que f est normal.
   Montrer que $\| f(u)\| = \| f^*(u)\|$ pour tout u de E.
   Remarque : il en découle évidemment l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$. [S]

   (b) Réciproquement, on suppose que $\| f(u)\| = \| f^*(u)\|$ pour tout u de E.
   Montrer que f est un endomorphisme normal.
   Indication : considérer des produits scalaires $(f(u) \mid f(v))$. [S]

3. (a) Montrer l'équivalence : f est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall\, u \in E,\ (f(u) \mid u) = 0$. [S]

   (b) Dans cette question seulement, $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure d'espace euclidien orienté usuelle (de telle manière que la base canonique soit orthonormée directe.)
   Pour tout a de $\mathbb{R}^3$, on définit l'application f_a par $\forall\, u \in \mathbb{R}^3,\ f_a(u) = a \wedge u$.
   Montrer que l'application $a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$. [S]

4. (a) Montrer que si f est un endomorphisme normal, alors $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   Vérifier que la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ est injective. [S]

   (b) On suppose que f est une projection vectorielle de E.
   Montrer que : $f \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow f$ est une projection orthogonale. [S]

   (c) On suppose que f est automorphisme involutif de E (une symétrie vectorielle.)
   Montrer que : $f \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow f$ est une symétrie orthogonale. [S]

   (d) Existe-t-il des projections ou des symétries vectorielles de E qui soient également des endomorphismes antisymétriques ? [S]

5. Dans cette question, f est un endomorphisme quelconque de E.
   On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E (c'est un sous-groupe du groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E.)

   (a) Montrer que f est dans $\mathrm{O}(E)$ si et seulement si f est dans $\mathcal{GL}(E)$ et $f^* = f^{-1}$.
   Vérifier que $\mathrm{O}(E)$ est inclus dans $\mathcal{N}(E)$. [S]

   (b) Prouver que l'intersection $\mathrm{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$ est formée de l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales de E. [S]

Quelques définitions

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$ et tout réel λ, on note $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda\text{Id}) = \{u \in E,\ f(u) = \lambda u\}$.

On dit que λ est une *valeur propre* de f s'il existe au moins un vecteur u *non nul* tel que que $f(u) = \lambda u$, c'est-à-dire si $E_\lambda(f)$ n'est pas réduit à $\overrightarrow{0}$. On dit alors que u est un *vecteur propre* de f associé à λ, et que $E_\lambda(f)$ est le *sous-espace propre* de f associé à λ.

On note $\text{Sp}(f)$ (*spectre* de f) l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres de f.

Remarque : soit M la matrice de f dans une base (e) de E, et soit λ un réel.
Dire que λ est valeur propre de f, c'est dire que $f - \lambda\text{Id}$ n'est pas injective.
Cela équivaut bien sûr à dire que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
Autrement dit, le spectre de f est l'ensemble des réels λ tels que $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Troisième partie

On étudie ici des propriétés relatives aux valeurs et aux vecteurs propres des endomorphismes normaux, symétriques ou antisymétriques de E.

1. Dans cette question, f est un endomorphisme normal de E.
   (a) Prouver que f et f^* ont les mêmes valeurs propres. Plus précisément, on montrera que si λ est une valeur propre de f, donc de f^*, alors $E_\lambda(f) = E_\lambda(f^*)$.
   Indication : on observera que pour tout λ de $\mathbb{R}$, $g = f - \lambda\text{Id}$ est normal. [S]
   (b) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.
   Montrer que les sous-espaces propres $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.
   Indication : considérez $(f(u) \mid v)$ en choisissant convenablement u et v. [S]
2. Dans cette question, f est un endomorphisme antisymétrique de E.
   (a) En considérant la matrice de f dans une base orthonormée (ε) adaptée à la somme directe orthogonale $E = \text{Im}\, f \oplus \text{Ker} f$, montrer que le rang de f est un entier pair. [S]
   (b) Montrer que la seule valeur propre possible de f est 0. Montrer que si n est impair, alors 0 est effectivement valeur propre de f (autrement dit, un endomorphisme antisymétrique en dimension impaire est non injectif.) [S]
3. Dans cette question, f est un endomorphisme symétrique de E.
   Soit M la matrice de f dans une base orthonormée (ε) de E. On sait que M est symétrique.
   On note P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $P(x) = \det(M - xI_n)$.
   (a) Montrer que P est une fonction polynomiale de degré n. [S]
   (b) Soit λ une racine du polynôme P dans $\mathbb{C}$.
   Justifier l'existence de $X \neq \overrightarrow{0}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. [S]
   (c) On note $\overline{X}$ la matrice-colonne dont les composantes sont les conjuguées de celles de X.
   Avec les notations précédentes, montrer que $M\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. [S]
   (d) En évaluant ${}^{t}XM\overline{X}$ de deux manières différentes, montrer que λ est un réel. [S]
   (e) En déduire que f possède au moins une valeur propre. [S]

Quatrième partie

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme symétrique, antisymétrique, normal ou orthogonal de E. On montre qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est très simple.

1. Dans cette question, f est un endomorphisme symétrique de E.
   (a) Montrer qu'il existe dans E une base orthonormée formée de vecteurs propres de f.
   La matrice de f dans cette base est donc diagonale.
   Indication : procéder par récurrence sur la dimension n de E. [S]
   (b) En déduire que si M est une matrice symétrique à coefficients réels, alors il existe une matrice orthogonale Ω telle que ${}^{t}\Omega M \Omega$ soit diagonale. [S]
2. Dans cette question, f est un endomorphisme antisymétrique de E.
   Dans les questions $(a), (b), (c), (d)$, on suppose de plus que f est un automorphisme.
   D'après (III2b), cela impose que n est pair. On pose donc $n = 2m$, avec $m \geq 1$.
   (a) Montrer que f^2 est un endomorphisme symétrique bijectif de E. [S]
   (b) Montrer que les valeurs propres de f^2 sont strictement négatives.
   Indication : si u est vecteur propre de f^2 pour λ, prouver $\| f(u)\|^2 = -\lambda \| u\|^2$. [S]
   (c) Soit λ une valeur propre de f^2. Il existe donc $a > 0$ tel que $\lambda = -a^2$.
   Soit ε_1 un vecteur propre de f^2 pour λ, que l'on choisit unitaire, et soit $\varepsilon_2 = \frac{1}{a} f(\varepsilon_1)$.
   Montrer $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ forment une base orthonormée d'un plan F stable par f.
   Montrer que la matrice dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de la restriction de f à F est $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. [S]
   (d) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs de taille 2, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, avec $\mu > 0$. [S]
   (e) On suppose maintenant que f est un endomorphisme antisymétrique quelconque de E.
   Montrer qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs réduits à (0) ou de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, avec $\mu > 0$. [S]
   (f) Énoncer pour les matrices antisymétriques réelles un résultat analogue à (IV1b). [S]
3. Dans cette question, f est un endomorphisme normal de E.
   Soit $f = g + h$ la décomposition de f sur la somme directe $\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$.
   On rappelle que g (symétrique) et h (antisymétrique) commutent, que les sous-espaces propres de g sont deux à deux orthogonaux, et que E en est la somme directe.
   (a) Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme symétrique g. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(g)$ est stable par l'endomorphisme antisymétrique h. [S]
   (b) En appliquant (IV.2) aux restrictions de h aux sous-espaces propres de g, montrer qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$. [S]
4. Soit f dans $\mathrm{O}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E où la matrice de f est diagonale par blocs égaux à (1) ou (-1), ou de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $0 < \theta < \pi$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. (a) Rappelons brièvement la démonstration de cette question de cours.

   Pour tout vecteur a de E, notons f_a la forme linéaire $x \mapsto (x \mid a)$.

   On vérifie que l'application $a \mapsto f_a$ est linéaire et injective.

   Elle réalise donc un isomorphisme de E sur son dual E^* (les dimensions sont les mêmes.)

   Autrement dit, pour tout φ de E^*, il existe un unique a de E tel que $\varphi = f_a$. [Q]

   (b) Pour ce vecteur y fixé, l'application $\varphi : x \mapsto (f(x) \mid y)$ est une forme linéaire sur E.

   Il existe donc un vecteur a unique de E tel que : $\forall\, x \in E,\ \varphi(x) = (x \mid a)$.

   Autrement dit, il existe a unique dans E tel que $\forall\, x \in E,\ (f(x) \mid y) = (x \mid a)$. [Q]

   (c) Soient y et z dans E, et α, β dans $\mathbb{R}$.

   Pour tout vecteur x de E, on a successivement :

   $$\begin{aligned}(x \mid f^*(\alpha y + \beta z)) &= (f(x) \mid \alpha y + \beta z) = \alpha\,(f(x) \mid y) + \beta\,(f(x) \mid z)\\ &= \alpha\,(x \mid f^*(y)) + \beta\,(x \mid f^*(z)) = (x \mid \alpha f^*(y) + \beta f^*(z))\end{aligned}$$

   Par différence, on voit que $(x \mid f^*(\alpha y + \beta z) - \alpha f^*(y) - \beta f^*(z)) = 0$ pour tout x de E.

   Il en résulte $f^*(\alpha y + \beta z) = \alpha f^*(y) + \beta f^*(z)$.

   Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application f^* est donc dans $\mathcal{L}(E)$. [Q]

2. (a) Soit M la matrice de f dans la base (ε).

   Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice est ${}^{t}M$ dans la base ε.

   Pour prouver $g = f^*$, il suffit de vérifier que $(f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$ pour tous x, y de E.

   La base (ε) étant orthonormée, cela revient à vérifier ${}^{t}[f(x)]_\varepsilon\,[y]_\varepsilon = {}^{t}[x]_\varepsilon\,[g(y)]_\varepsilon$.

   Mais $[f(x)]_\varepsilon = M[x]_\varepsilon$ et $[g(y)]_\varepsilon = {}^{t}M[y]_\varepsilon$.

   On trouve alors successivement :

   $(x \mid g(y)) = {}^{t}[x]_\varepsilon\,[g(y)]_\varepsilon = {}^{t}[x]_\varepsilon {}^{t}M[y]_\varepsilon = {}^{t}(M[x]_\varepsilon)[y]_\varepsilon = {}^{t}[f(x)]_\varepsilon\,[y]_\varepsilon = (f(x) \mid y)$

   On a donc l'égalité $f^* = g$.

   Il en découle que la matrice de f^* dans toute base orthonormée de E est la transposée de la matrice de f dans cette base. [Q]

   (b) Le rang, la trace et le déterminant d'un endomorphisme de E sont respectivement égaux au rang, à la trace et au déterminant de sa matrice dans une base quelconque de E.

   Si on se place dans une base orthonormée de E, on sait que les matrices de f et de f^* sont transposées l'une de l'autre.

   Le résultat de cette question en découle car on sait que deux matrices transposées l'une de l'autre ont le même rang, la même trace et le même déterminant (pour la trace c'est plus qu'évident ; pour le rang et le déterminant c'est du cours.) [Q]