



I - DÉFINITION DES POLYNÔMES DE CHEBYSHEV

1. Premières propriétés

1. a. La fonction T du package orthopoly

Le package `orthopoly` définit les principales familles de polynômes orthogonaux :

```
> restart: with(orthopoly);
```

$[G, H, L, P, T, U]$

Voici les polynômes de Chebyshev de première espèce, d'indice 0 à 9. On devine quelques propriétés élémentaires des polynômes T_k : degré, parité, coefficient du terme dominant...

```
> matrix(5,2,(i,j)->T[2*i+j-3]=T(2*i+j-3,x));
```

$$\begin{bmatrix} T_0 = 1 & T_1 = x \\ T_2 = 2x^2 - 1 & T_3 = 4x^3 - 3x \\ T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1 & T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 & T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\ T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 & T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \end{bmatrix}$$

La syntaxe d'appel de la fonction `T` est `T(n,x)`. Quand l'argument x est lui même une expression, le résultat final n'est pas développé, comme on le voit sur l'exemple suivant :

```
> T(5,x),T(5,a-1/a);
```

$$16x^5 - 20x^3 + 5x \text{string};, \text{string}; 16 \left(a - \frac{1}{a}\right)^5 - 20 \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 5a - \frac{5}{a}$$

1. b. Quelques relations entre les polynômes $T[n]$

L'utilisation de la fonction `T` du package `orthopoly` permet de vérifier certaines relations, pour des valeurs particulières de n . La fonction `eq` est un simple utilitaire qui nous permettra d'afficher les relations souhaitées, de manière plus convaincante. Cette fonction sera beaucoup utilisée dans la suite de ce chapitre.

```
> eq:=proc(obj,opr)
```

```
  print(obj=value(obj)); if nargs>1 then obj=opr(value(obj)); fi;
```

```
end :
```

Ici, on vérifie l'égalité $T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}$ pour $n = 7$:

```
> n:=7: eq('T(n,x)'); eq('2*x*T(n-1,x)-T(n-2,x)',expand);
```

$$T(n, x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$2xT(n-1, x) - T(n-2, x) = 2x(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) - 16x^5 + 20x^3 - 5x$$

$$2xT(n-1, x) - T(n-2, x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$



On vérifie maintenant l'égalité $T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_m T_n$, avec par exemple $m = 7$ et $n = 3$:

```
> m:=7; n:=3;
eq('2*T(m,x)*T(n,x)',expand); eq('T(m+n,x)');
eq('T(m-n,x)'); eq('T(m+n,x)+T(m-n,x)');
m:=7
n:=3
2 T(m, x) T(n, x) = 2 (64 x^7 - 112 x^5 + 56 x^3 - 7 x) (4 x^3 - 3 x)
2 T(m, x) T(n, x) = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 392 x^4 + 42 x^2
T(m + n, x) = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 400 x^4 + 50 x^2 - 1
T(m - n, x) = 8 x^4 - 8 x^2 + 1
T(m + n, x) + T(m - n, x) = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 392 x^4 + 42 x^2
```

De même on vérifie que $T_m(T_n) = T_n(T_m) = T_{mn}$, avec ici $m = 3$ et $n = 4$:

```
> m:=3; n:=4;
eq('T(m*n,x)'); eq('T(m,T(n,x))',expand); eq('T(n,T(m,x))',expand);
m:=3
n:=4
T(m n, x) = 2048 x^12 - 6144 x^10 + 6912 x^8 - 3584 x^6 + 840 x^4 - 72 x^2 + 1
T(m, T(n, x)) = 4 (8 x^4 - 8 x^2 + 1)^3 - 24 x^4 + 24 x^2 - 3
T(m, T(n, x)) = 2048 x^12 - 6144 x^10 + 6912 x^8 - 3584 x^6 + 840 x^4 - 72 x^2 + 1
T(n, T(m, x)) = 8 (4 x^3 - 3 x)^4 - 8 (4 x^3 - 3 x)^2 + 1
T(n, T(m, x)) = 2048 x^12 - 6144 x^10 + 6912 x^8 - 3584 x^6 + 840 x^4 - 72 x^2 + 1
```

Enfin on vérifie $T_{2n}(x) = 2T_n^2(x) - 1 = T_n(2x^2 - 1)$, avec $n = 5$:

```
> n:=5;
eq('T(n,x)'); eq('T(2*n,x)');
eq('2*T(n,x)^2-1',expand);
eq('T(n,2*x^2-1)',expand);
n:=5
T(n, x) = 16 x^5 - 20 x^3 + 5 x
T(2 n, x) = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 400 x^4 + 50 x^2 - 1
2 T(n, x)^2 - 1 = 2 (16 x^5 - 20 x^3 + 5 x)^2 - 1
2 T(n, x)^2 - 1 = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 400 x^4 + 50 x^2 - 1
T(n, 2 x^2 - 1) = 16 (2 x^2 - 1)^5 - 20 (2 x^2 - 1)^3 + 10 x^2 - 5
T(n, 2 x^2 - 1) = 512 x^10 - 1280 x^8 + 1120 x^6 - 400 x^4 + 50 x^2 - 1
```

1. c. Divisions euclidiennes entre polynômes de Chebyshev

L'instruction suivante montre, pour $n = 9$, les divisions euclidiennes du polynôme T_n par le polynôme T_m , avec $m = n, m = n - 1, \dots, m = 0$.

On remarque qu'au début le quotient $Q_{n,m}$ est égal à $2T_{n-m}$ et que le reste est égal à $-T_{2m-n}$.

On voit que ce n'est plus aussi simple quand m devient égal ou inférieur à $\frac{n}{3}$...

En effet le quotient de T_9 par T_3 n'est pas $2T_6$ mais $Q_{9,3} = 2T_6 - 1$, et le reste est nul.

```
> n:=9;
  convert([seq([Q[n,n-k]=quo(T(n,x),T(n-k,x),x,'r'),
               R[n,n-k]=r],k=1..9)],matrix);
```

$n := 9$

$$\left[\begin{array}{ll} Q_{9,8} = 2x & R_{9,8} = -64x^7 + 112x^5 - 56x^3 + 7x \\ Q_{9,7} = 4x^2 - 2 & R_{9,7} = -16x^5 + 20x^3 - 5x \\ Q_{9,6} = 8x^3 - 6x & R_{9,6} = -4x^3 + 3x \\ Q_{9,5} = 16x^4 - 16x^2 + 2 & R_{9,5} = -x \\ Q_{9,4} = 32x^5 - 40x^3 + 10x & R_{9,4} = -x \\ Q_{9,3} = 64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 & R_{9,3} = 0 \\ Q_{9,2} = 128x^7 - 224x^5 + 104x^3 - 8x & R_{9,2} = x \\ Q_{9,1} = 256x^8 - 576x^6 + 432x^4 - 120x^2 + 9 & R_{9,1} = 0 \\ Q_{9,0} = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x & R_{9,0} = 0 \end{array} \right]$$

On confirme ici avec $m = 4$ que T_{3m} est divisible par T_m , et que le quotient est $4T_m^2 - 3$.

```
> m:=4; eq('T(3*m,x)/T(m,x)',simplify); eq('4*T(m,x)^2-3',expand);
```

$m := 4$

$$\frac{T(3m, x)}{T(m, x)} = \frac{2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1}{8x^4 - 8x^2 + 1}$$

$$\frac{T(3m, x)}{T(m, x)} = 256x^8 - 512x^6 + 320x^4 - 64x^2 + 1$$

$$4T(m, x)^2 - 3 = 4(8x^4 - 8x^2 + 1)^2 - 3$$

$$4T(m, x)^2 - 3 = 256x^8 - 512x^6 + 320x^4 - 64x^2 + 1$$

Les procédures Q et R forment le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ dans la division de T_n par T_m . Tous les cas particuliers sont traités (n multiple de m par un entier impair, par exemple).

Les entiers n et m doivent être tous les deux strictement positifs.

```

> Q:=proc(n::posint,m::posint)
  local k,p; p:=(n-m)/(2*m); 2*sum((-1)^k*T(n-(2*k+1)*m,x),k=0..p);
  if type(p,integer) then %-(-1)^p else % fi;
end :
R:=proc(n::posint,m::posint)
  local q,p; q:=(n-m)/(2*m); p:=ceil(q);
  if type(q,integer) then 0 else (-1)^p*T(abs(n-2*p*m),x) fi
end :

```

On vérifie que Q donne le bon résultat, avec par exemple $n = 15$, et $m \in \{12, 5, 3, 2\}$.

Pour cela on compare les quotients calculés par Q et par la fonction intégrée quo :

```

> n:=15 :
for m in [12,5,3,2] do eq('Q'(n,m));
  eq('quo'('T'(n,x),'T'(m,x),x));
od;

```

$$Q(15, 12) = 8x^3 - 6x$$

$$\text{quo}(T(15, x), T(12, x), x) = 8x^3 - 6x$$

$$Q(15, 5) = 1024x^{10} - 2560x^8 + 2240x^6 - 800x^4 + 100x^2 - 3$$

$$\text{quo}(T(15, x), T(5, x), x) = 1024x^{10} - 2560x^8 + 2240x^6 - 800x^4 + 100x^2 - 3$$

$$Q(15, 3) = 4096x^{12} - 12288x^{10} + 13824x^8 - 7232x^6 + 1776x^4 - 180x^2 + 5$$

$$\text{quo}(T(15, x), T(3, x), x) = 4096x^{12} - 12288x^{10} + 13824x^8 - 7232x^6 + 1776x^4 - 180x^2 + 5$$

$$Q(15, 2) = 8192x^{13} - 26624x^{11} + 32768x^9 - 18816x^7 + 4992x^5 - 528x^3 + 16x$$

$$\text{quo}(T(15, x), T(2, x), x) = 8192x^{13} - 26624x^{11} + 32768x^9 - 18816x^7 + 4992x^5 - 528x^3 + 16x$$

On effectue la même vérification avec la procédure R :

```

> n:=15 :
for m in [12,5,3,2] do
  eq('R'(n,m)); eq('rem'('T'(n,x),'T'(m,x),x));
od;

```

$$R(15, 12) = -256x^9 + 576x^7 - 432x^5 + 120x^3 - 9x$$

$$\text{rem}(T(15, x), T(12, x), x) = -256x^9 + 576x^7 - 432x^5 + 120x^3 - 9x$$

$$R(15, 5) = 0$$

$$\text{rem}(T(15, x), T(5, x), x) = 0$$

$$R(15, 3) = 0$$

$$\text{rem}(T(15, x), T(3, x), x) = 0$$

$$R(15, 2) = x$$

$$\text{rem}(T(15, x), T(2, x), x) = x$$

On peut aussi, si on n'est encore pas convaincu, vérifier le fonctionnement de Q et R pour les couples (n, m) tels que $0 < m < n$, avec une valeur fixée de n , par exemple $n = 50$.

Les deux valeurs logiques obtenues ci-dessous confirment que tous les résultats sont corrects :

```
> n:=50: true: for m from n-1 to 1 by -1 do
  % and evalb(Q(n,m)=quo(T(n,x),T(m,x),x))
od: %;
true: for m from n+1 to 1 by -1 do
  % and evalb(R(n,m)=rem(T(n,x),T(m,x),x))
od: %;
```

true

true

2. Définitions possibles de $T[n]$

2. a. Trois méthodes basées sur le développement de $\cos(n \arccos(x))$

Voici une première manière de retrouver les polynômes de Chebyshev $T[n]$. On utilise ici l'expression résultant de l'application de la formule de Moivre, et on demande à Maple de finaliser le développement.

```
> x:='x': Ta:=(n::nonnegint,x)->
  expand(sum(binomial(n,2*'k')*(x^2-1)^(n-2*'k')*x^(n-2*'k'), 'k'=0..n/2));
```

$$Ta := (n::nonnegint, x) \rightarrow \text{expand} \left(\sum_{k'=0}^{1/2n} \text{binomial}(n, 2k') (x^2 - 1)^{k'} x^{(n-2k')} \right)$$

On vérifie que le résultat est correct avec le polynôme d'indice 5 :

```
> Ta(5,x);
```

$$16x^5 - 20x^3 + 5x$$

On pourrait également, toujours en utilisant la formule de Moivre, écrire que $T[n]$ est la partie réelle de $\exp(i \arccos(x))^n$, c'est-à-dire celle de $(x + i\sqrt{1-x^2})^n$.

Voici une proposition de solution.

On compte ici sur la fonction `expand` pour développer la puissance n -ième :

```
> Tb:=(n::nonnegint,x)->Re(expand((x+I*sqrt(1-x^2))^n));
```

$$Tb := (n::nonnegint, x) \rightarrow \Re(\text{expand}((x + I\sqrt{1-x^2})^n))$$



Mais on voit que la fonction `Re` n'agit pas sur l'expression développée.

Maple ne sait en effet pas ce que contient x (son contenu pourrait être un nombre complexe) :

```
> Tb(4,x);
```

$$1 + 4 \Re(2x^4 + 2I\sqrt{1-x^2}x^3 - 2x^2 - I\sqrt{1-x^2}x)$$

Même en supposant que x est réel, on se heurte à une difficulté provenant de la racine carrée de $1 - x^2$:

```
> assume(x,real): Tb(4,x);
```

$$8x^4 - 8x^2 + 1 + 4 \Re(2I\sqrt{1-x^2}x^3 - I\sqrt{1-x^2}x)$$

Il faut donc supposer que x est compris entre -1 et 1 :

```
> assume(x,RealRange(-1,1)): Tb(4,x);
```

$$8x^4 - 8x^2 + 1$$

Voici maintenant une troisième façon de retrouver les polynômes de Chebyshev T_n .

On utilise la définition $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ et on demande à Maple de développer :

```
> x:='x': Tc:=(n::nonnegint,x)->expand(cos(n*arccos(x)));
```

$$Tc := (n::nonnegint, x) \rightarrow \text{expand}(\cos(n \arccos(x)))$$

On retrouve bien le polynôme T_5 , par exemple :

```
> Tc(5,x);
```

$$16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Il se passe cependant une chose étonnante : on peut ainsi calculer tous les T_n jusqu'à $n = 99$ (et le résultat est instantané), mais ce n'est plus possible à partir de $n = 100$, car alors Maple refuse de développer !

```
> eq('expand(cos(10*theta))'); eq('expand(cos(100*theta))');
```

$$\text{expand}(\cos(10\theta)) = 512\cos(\theta)^{10} - 1280\cos(\theta)^8 + 1120\cos(\theta)^6 - 400\cos(\theta)^4 + 50\cos(\theta)^2 - 1$$

$$\text{expand}(\cos(100\theta)) = \cos(100\theta)$$