REPERAGE DANS L'ESPACE

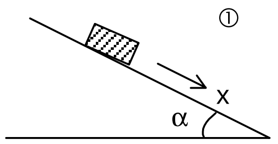
Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

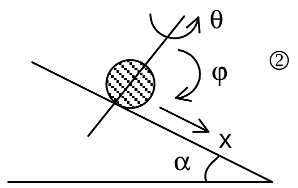
****

****

I. Notion de point matériel.

1ère Définition : un point matériel est un système matériel de petites dimensions vis-à-vis des moyens d'observation utilisés (une étoile de notre galaxie, observée à l'œil nu, pourra être assimilée à un point matériel).
Mais cette définition est manifestement insatisfaisante ; prenons l'exemple d'un petit morceau de matière en mouvement sur un plan incliné :





- Un petit palet glissera (avec ou sans frottements) sur le plan (①)
- Une petite bille pourra rouler, glisser et même pivoter sur le plan (②).

L'étude du mouvement sera donc différente dans les 2 cas : le cas ① relèvera de la « mécanique du point », le cas ② de la « mécanique du solide » (aussi petite soit la bille).

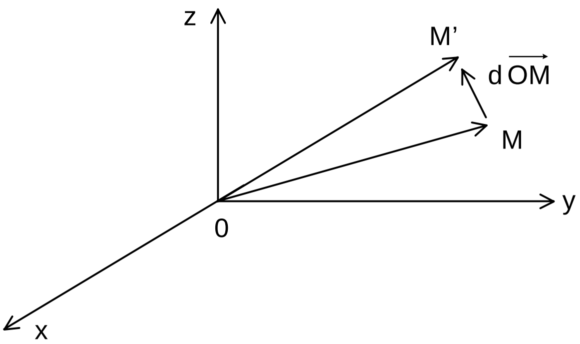
2e définition : un point matériel « libre » (de se mouvoir dans l'espace, sans aucune « liaison ») est un système matériel possédant 3 degrés de liberté (paramètres indépendants permettant de décrire complètement le système) : ses coordonnées.
Par opposition, un solide « libre » possèdera 6 degrés de liberté (3 degrés de translation et 3 degrés de rotation).

Rem. : en cas d'existence de « liaisons » : $n \leq 3$ pour un point matériel, $n \leq 6$ pour un solide (n nombre de degrés de liberté).

Exemple :
*Dans le cas ①, le palet, posé sans vitesse sur le plan, possède 1 degré de liberté x.
*Dans le cas ②, la bille (toujours posée sans vitesse), possède a priori 3 degrés de liberté : x, θ (pivotement), φ (roulement)
Pour repérer un point matériel libre, on définit ses coordonnées dans une base orthonormée directe (BOND).
On utilise usuellement en physique 3 systèmes de coordonnées.

II. Coordonnées cartésiennes.

On utilise la BOND « fixe » $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

(vecteur position)

A priori, le point M sera mobile dans l'espace. En munissant le repère d'une horloge (repère de temps), on aura alors :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{x} + y(t)\,\vec{y} + z(t)\,\vec{z}$$

Si M' est la position du mobile à l'instant t + dt, ses coordonnées sont : x + dx, y + dy, z + dz. Ainsi :

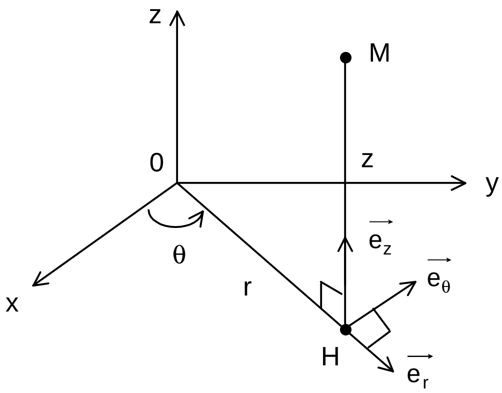
$$\overrightarrow{OM}'(t) = (x + dx)\,\vec{x} + (y + dy)\,\vec{y} + (z + dz)\,\vec{z}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM}' = d\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur « <u>déplacement élémentaire</u> » (pendant l'intervalle de temps « élémentaire » dt) associé au mobile M.
En coordonnées cartésiennes, nous avons donc :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{x} + dy\,\vec{y} + dz\,\vec{z}}$$

III. Coordonnées cylindriques.

On les utilise quand on a un problème à « symétrie cylindrique » d'axe 0z ; elles simplifient également l'étude de certains problèmes de mécanique (cf mouvements à force centrale).



Soit H la projection orthogonale de M sur le plan 0xy.

Les 3 coordonnées cylindriques du point M sont :

$$\begin{cases} r = OH \in [0, +\infty[\\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) \in [0, 2\Pi] \\ z = \overline{HM} \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$$

On utilise alors la base « locale » (ou « mobile ») de coordonnées $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ telle que :

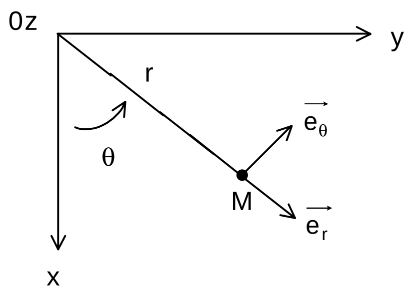
$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{r} & \text{vecteur « radial »} \\ \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} & \text{vecteur « orthoradial »} \\ \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{z} & \end{cases}$$

Dans ces conditions : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$

On remarquera que, si M se déplace au cours du temps, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ « varient ».

Donc : $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\overrightarrow{e_r}(t) + z(t)\,\overrightarrow{e_z}}$ ($\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{z}$ est « fixe »)

Rem. : pour un point M restant dans le plan 0xy, on le repère par ses coordonnées (r, θ), appelées coordonnées « polaires » :



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

Propriété fondamentale

On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\,\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{x} + \cos\theta\,\overrightarrow{y} \end{cases}$$