CINEMATIQUE DU POINT

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

I. Vecteur vitesse. 1
II. Vecteur accélération. 2
III. Exemples de mouvements. 4
IV. Changement de référentiel. 8

****

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement, indépendamment des causes (les forces).
On se place évidemment en mécanique newtonienne.

Le mouvement est relatif au référentiel d'étude : on définit un référentiel (R) comme l'association d'un repère d'espace (muni d'une BOND) et d'un repère de temps (horloge).
Par abus de langage, on confond souvent référentiel et repère d'espace.

I. Vecteur vitesse.

I.1. Définition.

On définit le vecteur vitesse d'un point M par rapport à un référentiel d'étude :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R}$$

Rem. : s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overset{o}{\vec{r}}$

$$\begin{cases} \|\vec{V}\| \text{ s'exprime en } ms^{-1} \\ \vec{V} \text{ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement} \end{cases}$$

I.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- Cartésiennes : $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{x} + dy\,\vec{y} + dz\,\vec{z}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad \left| \begin{array}{l} \overset{o}{x} = V_x \\ \overset{o}{y} = V_y \\ \overset{o}{z} = V_z \end{array} \right.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

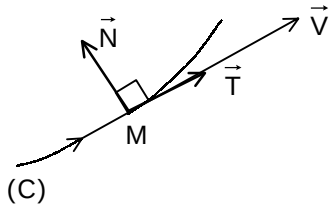
- <u>Cylindriques</u> : $d\overrightarrow{OM} = dr\ \overrightarrow{e_r} + rd\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + dz\ \overrightarrow{e_z}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \quad (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}) \quad \left| \begin{array}{l} \overset{o}{r} = V_r \\ r\overset{o}{\theta} = V_\theta \\ \overset{o}{z} = V_z \end{array} \right.$$

- <u>Sphériques</u> : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \quad (\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}) \quad \left| \begin{array}{l} \overset{o}{r} = V_r \\ r\overset{o}{\theta} = V_\theta \\ r\sin\theta\overset{o}{\varphi} = V_\varphi \end{array} \right.$$

- <u>Trièdre de Frenet</u> :



$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \overset{o}{s}\,\vec{T} = V\vec{T}} \qquad \text{(vitesse algébrique)}$$

II. Vecteur accélération.

II.1. Définition.

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{d\,\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

(en l'absence d'ambiguïté : $\vec{a} = \overset{o}{\vec{V}} = \overset{oo}{\vec{r}}$)

$$\begin{cases} \|\vec{a}\| \text{ s'exprime en } ms^{-2} \\ \vec{a} \text{ est dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire (cf ii))} \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

II.2. Expression dans les divers systèmes de coordonnées.

- <u>Cartésiennes</u>

$$\vec{V} = \overset{o}{x}(t)\,\vec{x} + \overset{o}{y}(t)\,\vec{y} + \overset{o}{z}(t)\,\vec{z}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} \vec{a} & \overset{oo}{x} \\ & \overset{oo}{y} \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) & \overset{oo}{z} \end{array}$$

- <u>Cylindriques</u>

$$\vec{V} = \overset{o}{r}(t)\,\overrightarrow{e_r}(t) + r(t)\,\overset{o}{\theta}(t)\,\overrightarrow{e_\theta}(t) + \overset{o}{z}(t)\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = [\,\overset{oo}{r}\,\overrightarrow{e_r} + \overset{o}{r}\,\overset{o}{\overrightarrow{e_r}}\,] + [\,\overset{o}{r}\,\overset{o}{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\overset{oo}{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\,\overset{o}{\theta}\,\overset{o}{\overrightarrow{e_\theta}}\,] + \overset{oo}{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

Or : $\begin{cases} \overset{o}{\overrightarrow{e_r}} = \overset{o}{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \\ \overset{o}{\overrightarrow{e_\theta}} = -\,\overset{o}{\theta}\,\overrightarrow{e_r} \end{cases}$ donc :

$$\begin{array}{c|c} \vec{a} & \overset{oo}{r} - r\,\overset{o}{\theta}^2 = a_r \\ & 2\,\overset{o}{r}\,\overset{o}{\theta} + r\,\overset{oo}{\theta} = a_\theta \\ (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}) & \overset{oo}{z} = a_z \end{array}$$

<u>Rem.</u> **:**

☞ Comme $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont des vecteurs « mobiles », il est bien sûr faux d'écrire :

$$a_r = \overset{o}{V}_r \quad \text{et} \quad a_\theta = \overset{o}{V}_\theta\,.$$

Il faut <u>dériver aussi les vecteurs</u> !.. (donc <u>attention</u>)

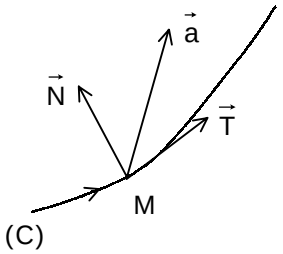
☞ On peut remarquer que :

$$a_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\,\overset{o}{\theta}) \qquad \textit{(nous utiliserons plus tard ce résultat).}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

- <u>Trièdre de Frenet</u> :



$$\vec{V} = \overset{o}{s}_{(t)}\,\vec{T}(t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \overset{oo}{s}\,\vec{T} + \overset{o}{s}\,\overset{o}{\vec{T}}$$

Or : $$\overset{o}{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

Comme $$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\,\vec{N}$$:

$$\overset{o}{\vec{T}} = \frac{\overset{o}{s}}{R}\,\vec{N}$$

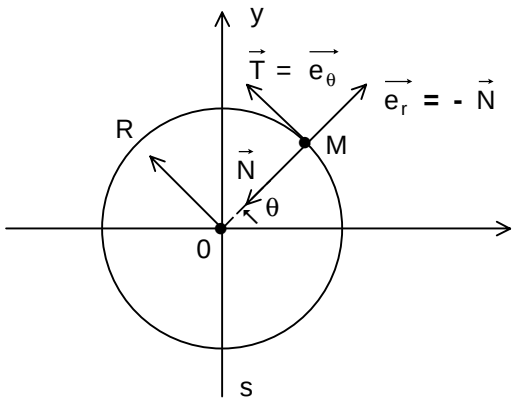
Donc :

$\vec{a}$	$\overset{oo}{s} = \overset{o}{V} = a_T$
	$\overset{o}{s}^2 / R = \frac{V^2}{R} = a_N$
$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$	O

(a_T accélération tangentielle, $a_N > 0$ accélération normale)

III. Exemples de mouvements.

III.1. Mouvement circulaire.



On pose : $$\begin{cases} s = \overset{\frown}{AM} = R\theta \\ \omega(t) = \overset{o}{\theta}(t) \end{cases}$$

On remarque que : $$\begin{cases} \vec{N} = -\vec{e_r} \\ \vec{T} = \vec{e_\theta} \end{cases}$$ (attention, cette propriété n'est valable que pour le cercle).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.