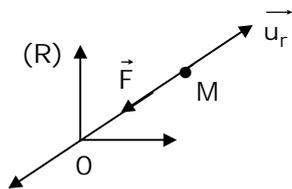


MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

I.	Propriétés générales.....	1
II.	Cas d'une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$, $k = \text{cste}$	3
III.	Cas d'une force « newtonienne » $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$:.....	4

Dans un référentiel (R) galiléen, on considère un point M soumis à une force :



$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$$

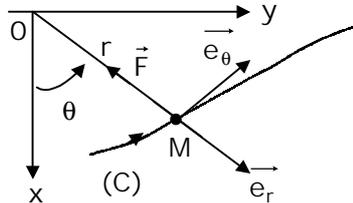
- $F(r) > 0$: force répulsive
- $F(r) < 0$: force attractive

I. Propriétés générales.

Un mouvement à force centrale est aussi un mouvement à accélération centrale. Les propriétés cinématiques ont donc été vues en II.

- La trajectoire est plane.

Dans le plan Oxy, on repère M par ses coordonnées polaires (r, θ).



$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

- Le mouvement obéit à la loi des aires :

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = C} \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C}$$

Rem.: la loi des aires correspond à la conservation du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \boxed{\vec{\sigma}(O) = mr^2 \dot{\theta} \vec{z} = \text{cste}}$$

- Formules de Binet

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m c^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \\ F(r) = m a_r = - m c^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \end{cases} \quad \left(u = \frac{1}{r} \right)$$

En dynamique, on peut rajouter la propriété suivante :

- $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$ dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = - F(r) \Rightarrow \boxed{E_p(r) = - \int F(r) dr}$$

Le système est donc conservatif : $E_m = \text{cste}$

L'étude du mouvement se fait, en général, (sauf en 7.2) en coordonnées polaires.

On peut s'intéresser aux lois $r(t)$, $\theta(t)$ et $r(\theta)$ (équation polaire de la trajectoire).

- Détermination de $r(t)$ et $\theta(t)$

On peut utiliser la RFD ou la conservation de l'énergie mécanique :

$$\bullet \quad \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} F(r) = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r^2\ddot{\theta} \end{pmatrix} \\ r^2\dot{\theta} = C \end{cases}$$

En éliminant $\ddot{\theta}$, on obtient une équation différentielle sur $r(t)$ (pas toujours simple à résoudre !).

$$\bullet \quad E_m = \text{cste } E_0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + E_p(r) \\ r^2 \dot{\theta} = C \end{cases}$$

Là encore, l'élimination de $\dot{\theta}$ conduit à une intégrale 1^{ère} de l'énergie de la variable $r(t)$.

- Détermination de l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta)$:

Il est alors judicieux d'utiliser les formules de Binet :

$$\begin{cases} F(r) = - mc^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \\ E_p(r) + \frac{1}{2} mc^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) = E_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une équation différentielle sur $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$.

Rem. : E_0 et C sont données par les conditions initiales, ou les valeurs de r et \vec{v} en un point donné de la trajectoire (par exemple pour une planète du système solaire).

II. Cas d'une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$, $k = \text{cste}$.

Alors :

$$F(r) = \begin{cases} kr \\ E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2 + \text{cste} \end{cases}$$

II.1. Cas ou $k > 0$: force attractive.

En projection sur (\vec{x}, \vec{y}) , la RFD donne :

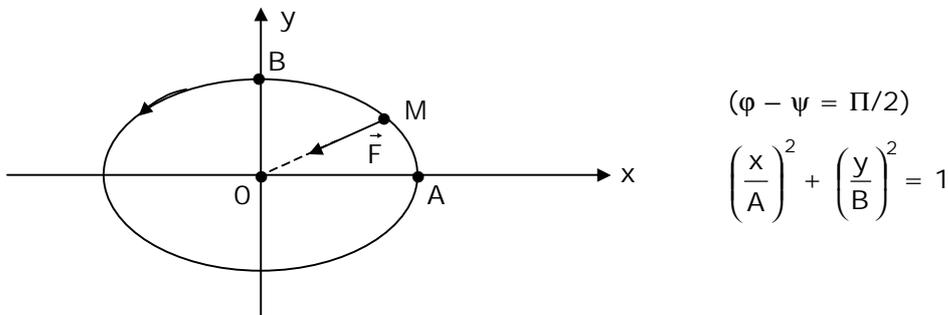
$$\begin{cases} m \ddot{x} = -kx \\ m \ddot{y} = -ky \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Il s'agit de l'oscillateur harmonique bidimensionnel :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$

La trajectoire est une ellipse de centre O, décrite selon la loi des aires.



Pour $\varphi - \psi = 0$ (II), cette ellipse se réduit à une droite.

II.2. Cas ou $k < 0$: force répulsive.

On a cette fois :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} - \omega_0^2 y = 0 \end{cases}, \text{ si } \omega_0^2 = -\frac{k}{m} > 0$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = A \text{ch}(\omega_0 t + \varphi) \\ y(t) = B \text{ch}(\omega_0 t + \psi) \end{cases}$$