SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

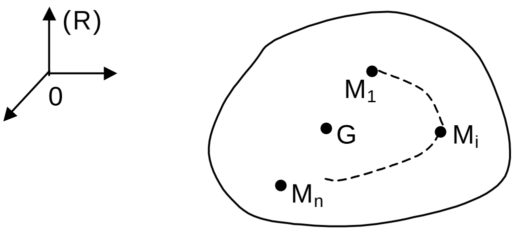
****

****

I. Théorèmes généraux (en référentiel galiléen).

On considère un système de n points matériels M_i de masse m_i, en mouvement par rapport à (R) galiléen.

I.1. Théorème du centre de masse (TCM).



Le centre de masse (ou d'inertie) G du système est le barycentre des (M_i, m_i) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{m} \quad \left(m = \sum_{i=1}^n m_i\right) \qquad \left(\text{ou : } \sum_1^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{O}\right)$$

Appliquons la RFD au point M_i :

$$m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \underbrace{\vec{f_i}\,(ext)}_{\substack{\text{somme des forces}\\ \text{exercées sur } M_i\\ \text{par des points}\\ \text{extérieurs au système}}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j\to i}}}_{\substack{\text{forces exercées}\\ \text{par } M_{j\neq i}}}$$

En sommant les RFD appliquées à chaque point M_i, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}}_{m\,\overrightarrow{a_G}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{f_i}\,(ext)}_{\overrightarrow{F_{ext}}} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j\to i}} \right)$$

(résultante des forces <u>extérieures</u> au système)

D'après le principe des actions réciproques :

$$\overrightarrow{f_{j\to i}} = -\,\overrightarrow{f_{i\to j}} \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j\to i}} \right) = \vec{O}$$

François MORAND
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Ainsi : $\boxed{m\,\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{F_{ext}}}$ (TCM ou TCI)

Pour un système isolé : $\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{a_G} = \vec{O}$: <u>G est en T R U</u>

I.2. Théorème du moment cinétique.

Le moment cinétique en A du système matériel, évalué dans (R), défini par :

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\, \overrightarrow{v_i}$$

Alors : $$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\, \overrightarrow{a_i} + \sum_i \left(\overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_A}\right) \wedge m_i\, \overrightarrow{v_i}$$

Avec : $$m_i\, \overrightarrow{a_i} = \vec{f_i}(ext) + \underbrace{\sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j\to i}}}_{\vec{f_i}\,(int)}$$

On peut montrer que :

$$\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\sum_{j\neq i} \overrightarrow{f_{j\to i}}\right) = \vec{O}$$ (d'après le principe des actions réciproques).

Ainsi : $$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \vec{m}^{\,t}(A)\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right) - \overrightarrow{v_A} \wedge m\,\overrightarrow{v_G}}$$ (TMC en A)

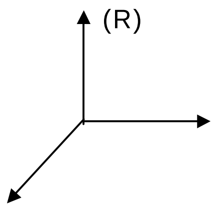
En particulier, si A est fixe, ou A=G :

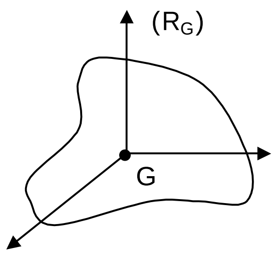
$$\overrightarrow{v_A} \wedge m\,\overrightarrow{v_G} = \vec{O}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{m}^{\,t}(G)\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$ (TMC en G)

<u>Rem. 1</u> : il faut prendre garde à ne pas écrire : $\vec{\sigma}(A) = \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{v_G}$

En effet, si (R_G) est le référentiel barycentrique du système :





$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i}^{\,*} + \overrightarrow{v_G}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v_i}'}_{\vec{\sigma}^*(A)} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_G}_{\overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}_G} \\ \vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*(G) = \vec{\sigma}^*(A) = \vec{\sigma}^* \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}_G}$$

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour le moment cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

<u>*Rem. 2*</u> : d'après la remarque 1 :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{m}^t(G)\left(\sum \overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

(TMC en G dans (R_G), appelé aussi TMC barycentrique).

<u>*Rem. 3*</u> : Pour un système <u>isolé</u> :

$$\begin{cases} \underline{\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{cste}} \\ \text{et} \quad \underline{\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{cste}, \text{ si } 0 \text{ fixe}} \end{cases}$$

I.3. Théorèmes énergétiques.

On peut écrire :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \underbrace{\vec{f}_i\,(int + ext)}_{}$$

Somme de toutes les forces exercées sur M_i, intérieures et extérieures au système

D'où :

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i\,(int + ext) \cdot \vec{v}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i\,(int + ext) \cdot \vec{v}_i$$

Or :

$$\boxed{E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

Donc on obtient :

$$\boxed{\frac{dE_C}{dt} = \underbrace{P\,(int + ext)}_{}} \qquad \text{(TPC)}$$

Puissance de <u>toute</u>s les forces (int + ext) exercées sur le système

$$\boxed{\begin{array}{l} dE_C = \delta W\,(int + ext) \\ \Delta E_C = W\,(int + ext) \end{array}} \qquad \text{(TEC)}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

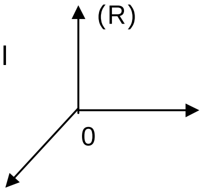
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

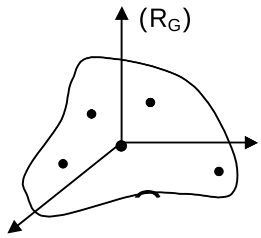
Enfin, en posant : $E_m = E_C + \underbrace{E_P\ (\text{int} + \text{ext})}_{\substack{\text{Energie potentielle dont dérive toutes} \\ \text{les forces exercées sur les divers } M_i}}$

$$\boxed{dE_m = \delta W_{NC}\ (\text{int} + \text{ext})} \qquad \text{(TEM)}$$

Rem. 1 : il faut prendre garde à ne pas écrire que $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v_G^2$

En effet, si (R_G) est le référentiel barycentrique du système :





$$\vec{v}_i = \vec{v}_i{}^* + \vec{v}_G$$

Donc $\qquad E_C = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \left(\vec{v}_i{}^* + \vec{v}_G\right)^2$

$$\Rightarrow \quad E_C = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^{2*}}_{E_C^*} + \frac{1}{2}\, m\, v_G^2 + \underbrace{\left(\sum m_i\, \vec{v}_i{}^*\right)}_{m\,\vec{v}_G{}^* = \vec{0}} . \vec{v}_G$$

Finalement : $\boxed{E_C = E_C^* + \frac{1}{2}\, m v_G^2}$: ce résultat, connu sous le nom de théorème de Koenig pour l'énergie cinétique, sera très utilisé en mécanique du solide.

Rem. 2 : pour un système de n points :

$$\underline{\sum \vec{F}\,(\text{int}) = \vec{0}} \quad , \quad \text{mais} \quad \underline{\delta W\ (\text{int}) \neq 0}$$

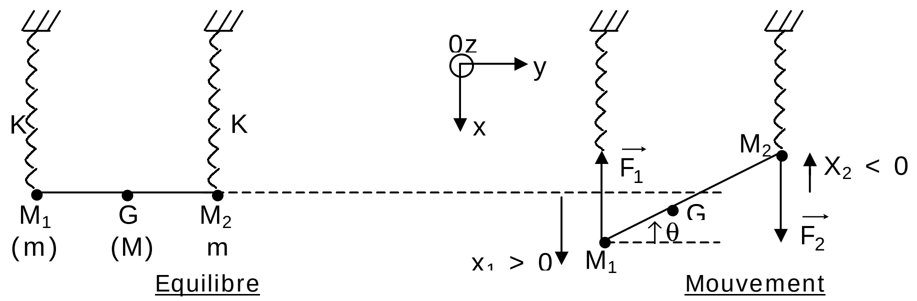
En effet, pour 2 points i et j :

$$\delta W\ (\text{int}) = \vec{f}_{i\to j} . \vec{v}_j\, dt + \vec{f}_{j\to i} . \vec{v}_i\, dt$$

$\vec{f}_{i\to j} = - \vec{f}_{j\to i}$, donc :

$$\delta W\ (\text{int}) = \vec{f}_{i\to j} . (\vec{v}_j - \vec{v}_i)\, dt \neq 0$$

I.4. **Exemple** : couplage par inertie de deux pendules élastiques



 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

- TCM au système $\{M_1, M_2\}$, en projection sur $\vec{x}$:

$$(2\,m + M)\,\ddot{x}_G = -K\,x_1 - K\,x_2$$

(Les poids compensent les tensions à l'équilibre, et n'interviennent pas dans l'équation du mouvement, si on compte x_1 et x_2 par rapport à l'équilibre).

Avec $x_G = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, on obtient la 1ère équation :

$$\boxed{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{-K}{m + M/2}(x_1 + x_2)} \qquad (1)$$

- TMC barycentrique au système $\{M_1, M_2\}$, en projection sur $\vec{y}$

$$\frac{d\sigma_z{}^*}{dt} = (\overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{F_2}).\vec{z}$$

$$= -K\,x_1\,\frac{\ell}{2}\cos\theta + K\,x_2\,\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

Avec :

$$\vec{\sigma}^* = (\overrightarrow{GM_1} \wedge m\,\vec{v_1}^*) + (\overrightarrow{GM_2} \wedge m\,\vec{v_2}^*)$$

$$\sigma_z{}^* = 2\,m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\dot{\theta} = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}$$

De plus :

$$\sin\theta = \frac{x_1 - x_2}{\ell}$$

Pour de petites oscillations du système :

$$\begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{ml}{2}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \approx -K\,(x_1 - x_2)\,\frac{l}{2}$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{-K}{m}(x_1 - x_2)}$$

Posons $\boxed{\omega_1^2 = \dfrac{K}{m + M/2}}$ et $\boxed{\omega_2^2 = \dfrac{K}{m}}$

Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_1 - x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = \alpha_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \alpha_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

α_1, α_2, φ_1 et φ_2 sont donnés par les conditions initiales x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$ et $\dot{x}_{20}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

On voit donc que x_1 et x_2 sont des combinaisons linéaires de 2 « modes propres » d'oscillation, l'un à la pulsation ω_1, l'autre à la pulsation ω_2.
ω_1 et ω_2 sont appelées pulsations propres du système couplé.

- Si $x_{10} = x_{20} = x_0$; $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

On trouve : $x_1(t) = x_2(t) = x_0 \cos \omega_1 t$, $\forall t$

Les 2 éléments oscillent en phase à la pulsation ω_1.

- Si $x_{10} = - x_{20} = x_0$; $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

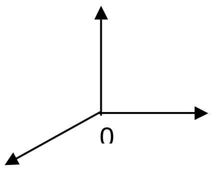
On trouve : $x_1(t) = - x_2(t) = x_0 \cos \omega_2 t$, $\forall t$

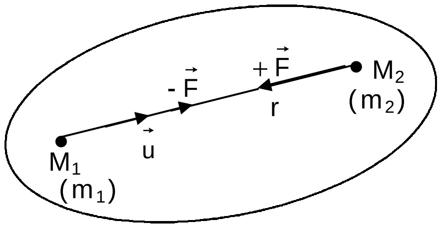
Les 2 éléments oscillent en opposition de phase à la pulsation ω_2.

II. *Cas particulier : système isolé de deux points matériels en interaction.*

II.1. Etude générale.

(R) galiléen





Système <u>isolé</u>

On considère le système $\{M_1, M_2\}$ isolé.

On pose $M_1M_2 = r$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\vec{u}$

On suppose que les deux points sont en interaction par l'intermédiaire d'une force ne dépendant que de r :

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \vec{F}(r) = F(r)\ \vec{u}$$

$$\overrightarrow{F_{2\to 1}} = - \vec{F}(r)$$

($F(r) > 0$: répulsion ; $F(r) < 0$: attraction)

Soit G le centre d'inertie du système.

Il est défini par : $m_1\ \overrightarrow{GM_1} + m_2\ \overrightarrow{GM_2} = \vec{O}$

Par application du TCM au système, dans (R) galiléen, on a :

$$(m_1 + m_2)\ \overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O}$$

Donc $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$: <u>(R_G) est alors galiléen</u>

<u>L'étude du système se fera alors dans (R_G)</u>.

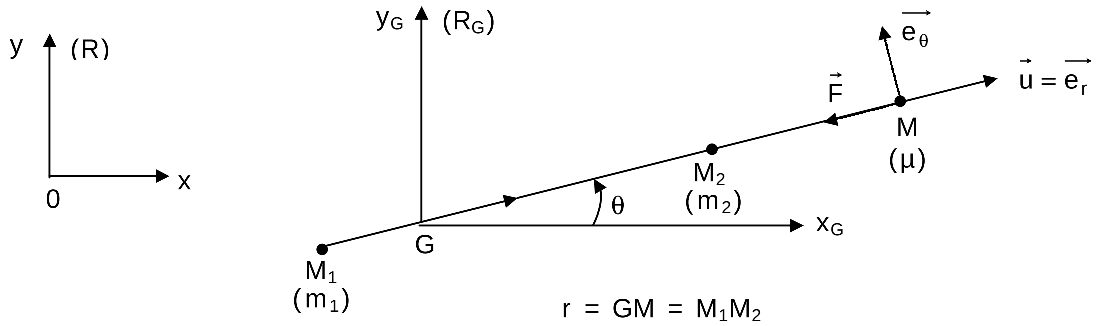
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Soit un point M, appelé « mobile fictif » (ou « particule réduite ») tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} \\ \text{M a pour masse } \mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(masse réduite)} \\ \text{M est soumis à } \vec{F} = F(r)\,\vec{u} \end{cases}$$

Dans (R_G), M est donc soumis à la force centrale $\vec{F}$. Toutes les propriétés vues dans le chapitre VIII s'appliquent alors.
En particulier, si la force est newtonienne, M décrit dans (R_G) une conique dont G est un foyer, selon la loi des aires.



Par application de la RFD, ou du TEM, on connaît donc $\overrightarrow{GM} = \vec{r}$.

Puis :
$$\begin{cases} m_1\,\overrightarrow{GM_1} + m_2\,\overrightarrow{GM_2} = 0 \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GM_1} = -\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \\ \overrightarrow{GM_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{r} \end{cases}$$

La connaissance de $\overrightarrow{GM}$ permet donc ensuite de déterminer $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ (trajectoires de M_1 et M_2 dans (R_G)).
Mais nous avons vu en VII que les équations du mouvement de M dans (R_G) font intervenir 2 grandeurs constantes, déterminées par exemple à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}^*(M) = \sigma_O^* & \text{moment cinétique barycentrique du point M} \\ E^* = E_O^* & \text{énergie barycentrique du point M} \end{cases}$$

Montrons que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\sigma}^*(M) = \vec{\sigma}^*\ \{M_1 + M_2\} \\ E_C^*(M) = E_C^*\ \{M_1 + M_2\} \end{array}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.