

## COMPLEMENTS (PCSI)

**Plan** (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

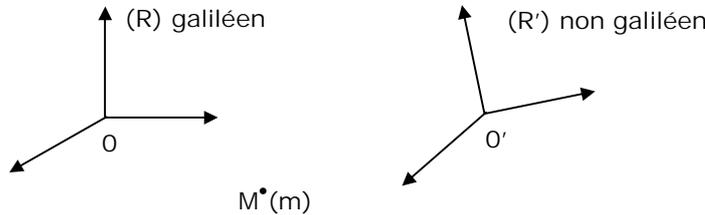
\*\*\*\*\*

I.	Théorème de la dynamique pour le point matériel en référentiel non galiléen. ....	1
II.	Champ de gravitation – champ de pesanteur. ....	7
III.	Termes de marée.s.....	16
IV.	Rotation d'un solide autour d'un axe fixe. ....	18

\*\*\*\*\*

### I. Théorème de la dynamique pour le point matériel en référentiel non galiléen.

I.1. **RFD :**



On a :

$$\begin{cases} m \vec{a} = \Sigma \vec{F} & \text{(RFD dans (R))} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c & \text{(composition des accélérations)} \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} \vec{F}_{i_e} = - m \vec{a}_e & \text{, force d'inertie d'entraînement} \\ \vec{F}_{i_c} = - m \vec{a}_c & \text{, force d'inertie de Coriolis} \\ & = - 2 m \vec{\Omega}_e \wedge \vec{V}' \end{cases}$$

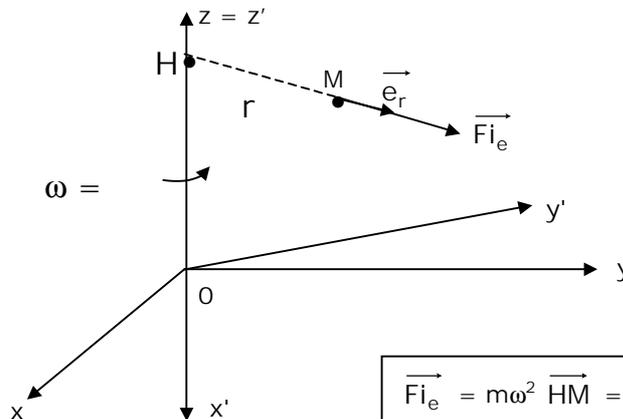
On obtient la RFD dans (R') non galiléen :

$$m \vec{a}' = \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}$$

Il suffit donc d'ajouter à  $\Sigma \vec{F}_{ext}$  les forces d'inertie, d'entraînement et de Coriolis.

Cas particuliers :

(R') en rotation uniforme autour de (R).



$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= - \omega^2 \overrightarrow{HM} \\ &= - \omega^2 r \vec{e}_r \end{aligned}$$

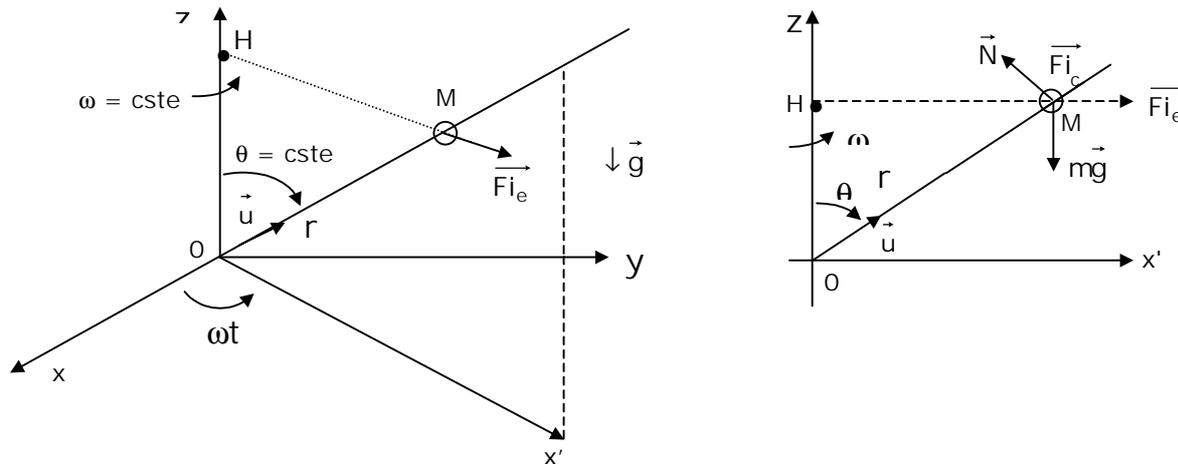
$$\vec{F}_{i_e} = m \omega^2 \overrightarrow{HM} = m \omega^2 r \vec{e}_r$$

(Force d'inertie « centrifuge »)  
© EduKlub S.A.

On peut remarquer que, dans ce cas,  $\vec{F}_{i_e}$  est une force conservatrice :

$$\begin{cases} \vec{F}_{i_e} = - \text{grad} \left( -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) = - \text{grad} E_{P_{i_e}} \\ E_{P_{i_e}} = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \text{ est l'énergie potentielle dont dérive la force centrifuge} \end{cases}$$

Exemple : Considérons un anneau coulissant sans frottement sur une tige décrivant un cône de demi-angle au centre  $\theta$ , à la vitesse angulaire  $\omega = \text{cste}$ . On cherche  $r(t) = OM(t)$ .



Dans  $(R')$  lié à la tige :

$$\begin{cases} m \vec{a}' = \vec{N} + m \vec{g} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c} \\ \vec{F}_{i_e} = m \omega^2 \overline{HM} \\ \vec{F}_{i_c} = -2 m \vec{\omega} \wedge \vec{V}' \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} HM = r \sin \theta \\ \vec{V}' = \overset{0}{r} \vec{u} ; \vec{a}' = \overset{00}{r} \ddot{u} \end{cases}$$

En projection sur  $\vec{u}$ , on tire :

$$m \overset{00}{r} \ddot{r} = - mg \cos \theta + (m \omega^2 r \sin \theta) \sin \theta$$

Soit :

$$\boxed{\overset{00}{r} \ddot{r} - \Omega^2 r = - g \cos \theta \quad , \quad \text{si } \Omega = \omega \sin \theta}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$r(t) = (\alpha \text{ch } \Omega t + \beta \text{sh } \Omega t) + \frac{g \cos \theta}{\Omega^2}$$

En supposant :

$$\left\{ \begin{array}{l} r(0) = r_0 \quad (\text{point lâché sans vitesse de la distance } r_0) : \end{array} \right.$$

$$\overset{\circ}{r}(0) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = \alpha = \frac{g \cos \theta}{\Omega^2} \\ \beta = 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$r(t) = \left( r_0 - \frac{g \cos \theta}{\Omega^2} \right) \text{ch } \Omega t + \frac{g \cos \theta}{\Omega^2}$$

On retrouve les deux types de mouvement relatif prévisibles a priori.

**1<sup>er</sup> cas** :  $r_0 > \frac{g \cos \theta}{\Omega^2}$  ( $r_0$  élevé »,  $\omega$  « élevée »)

Alors  $\left\{ \begin{array}{l} r(t) \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right.$  ; en pratique l'anneau sera « éjecté » au bout d'un temps fini (la force centrifuge l'emporte sur le poids). Cette condition est bien sûr toujours réalisée pour  $\theta \geq \Pi/2$ .

**2<sup>e</sup> cas** :  $r_0 < \frac{g \cos \theta}{\Omega^2}$  ( $r_0$  « faible »,  $\omega$  « faible »)

Alors  $\left\{ \begin{array}{l} r(t) \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty \end{array} \right.$  ; en pratique l'anneau tombe en 0 ( $r = 0$ ) au bout d'un temps fini (le poids l'emporte sur la force centrifuge).

Cette condition est bien sûr toujours réalisée pour  $\theta = 0$  ( $F_{i_e} = 0$ ).

### 1.2. Théorèmes énergétiques.

La force d'inertie de Coriolis, perpendiculaire à  $\vec{V}'$ , ne travaille pas dans (R').

Il suffit donc, par rapport à (R), de rajouter le travail de  $\vec{F}_{i_e}$  dans les théorèmes énergétiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dE'_c = \delta W' (\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{i_e}) \\ \Delta E'_c = W' (\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{i_e}) \end{array} \right\} \text{TEC}$$

$$\frac{dE'_c}{dt} = P' (\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{i_e}) \quad \text{TPC}$$

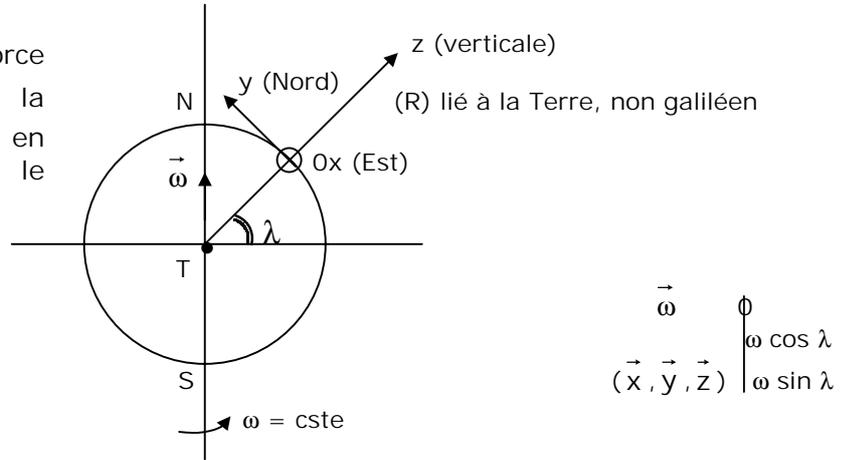
$$dE'_m = \underbrace{\delta W'_{\text{NC}}}_{\text{y compris } \delta W' (\vec{F}_{i_e}) \text{ si } \vec{F}_{i_e} \text{ est NC}} \quad \text{TEM}$$

### 1.3. Cas du référentiel « Terrestre ».

Nous supposons ici que le référentiel géocentrique est galiléen, et que  $\vec{g} \approx \vec{G} = -g\vec{z}$  est uniforme (mouvement du voisinage du sol, cf. II).

Nous verrons alors (cf. toujours II) que cette dernière hypothèse revient implicitement à négliger la force centrifuge  $\vec{F}_{i_e}$  due à la rotation terrestre.

Nous ne nous intéressons donc qu'à la force de Coriolis  $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}$  due à la rotation terrestre, et cherchons à mettre en évidence certains de ses effets sur le mouvement d'un point matériel.



$$\text{Si } \vec{V} = \vec{V} (M/R) \quad \begin{pmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \\ \overset{\circ}{z} \end{pmatrix} \quad \vec{F}_c = + 2 m \omega \quad \begin{pmatrix} \overset{\circ}{y} \sin \lambda - \overset{\circ}{z} \cos \lambda \\ - \overset{\circ}{x} \sin \lambda \\ \overset{\circ}{x} \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{en un lieu de latitude } \lambda)$$

Comme  $\omega$  est « faible », l'effet de  $\vec{F}_c$  est « faible », et nous négligerons les termes d'ordre supérieur à 1 en  $\omega$ .

1<sup>er</sup> cas : mouvement d'un point matériel libre

Dans (R) non galiléen, l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - 2 m \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

Pour développer  $\vec{F}_c$  au 1<sup>er</sup> ordre en  $\omega$ , il suffit de développer  $\vec{V}$  à l'ordre 0 en  $\omega$ , soit :

$$\vec{V} \approx \vec{V}_0 + \vec{g}t \quad (\vec{V}_0 \text{ vitesse initiale})$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> ordre en  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &\approx \vec{g} - 2 \vec{\omega} \wedge (\vec{V}_0 + \vec{g}t) \\ \Rightarrow \vec{V} &\approx \vec{g}t + \vec{V}_0 - 2 (\vec{\omega} \wedge \vec{V}_0) t - (\vec{\omega} \wedge \vec{g}) t^2 \end{aligned}$$

$$\text{Puis :} \quad \vec{OM} \approx (\vec{OM}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2) - \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_0) t^2 - \frac{1}{3} (\vec{\omega} \wedge \vec{g}) t^3}_{\text{Termes « correctifs »}} \quad (1)$$

Nous obtenons ci-dessus l'équation du mouvement de chute libre, avec  $\vec{F}_c$ , valable pour toutes conditions initiales.

Prenons 2 exemples simples de CI :

1<sup>er</sup> exemple :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = z_0 \vec{z} \\ \vec{V}_0 = \vec{0} \end{cases}$$

On lâche un point sans vitesse de l'altitude  $z_0$

$$\omega \begin{vmatrix} \vec{\omega} \wedge \vec{g} \\ 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} = \omega g \begin{vmatrix} -\cos \lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc, en projection sur  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , l'équation (1) donne :

$$\begin{cases} x(t) \approx \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t^3 \\ y(t) \approx 0 \\ z(t) \approx -\frac{1}{2} g t^2 + z_0 \end{cases}$$

Le point de chute correspond à  $z = 0$ .

L'instant de chute est  $t_1 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$ .

Alors :

$$x(t_1) = x_1 = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t_1^3$$

Soit :

$$x_1 = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda \left( \frac{2z_0}{g} \right)^{3/2} > 0 \quad (\lambda \neq \pm \frac{\pi}{2})$$

Dans tous les cas (hémisphère nord ou sud, sauf aux pôles), le point de chute est à l'est de  $M_0$  : on parle de « déviations vers l'Est ».

Numériquement :  $x_1 \approx 1,5$  cm si  $z_0 = 100$ m. Ce phénomène a pu être mis en évidence expérimentalement, dans une zone de calme atmosphérique. (Expérience de Cassini, vers 1830).

2<sup>e</sup> exemple :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = \vec{0} \\ \vec{V}_0 = V_0 \vec{z}, \quad V_0 > 0 \end{cases}$$

On lance un obus selon la verticale, et on cherche le point de chute.

En projection sur  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , (1) donne cette fois :

$$\begin{cases} x(t) \approx \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t^3 - \omega V_0 \cos \lambda t^2 \\ y(t) \approx 0 \\ z(t) \approx V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ici :  $t_1 = \frac{2 V_0}{g}$  et :

$$x_1 = -\frac{4}{3} \omega g \cos \lambda \frac{V_0^3}{g^2} < 0 \quad (\lambda \neq \pm \frac{\pi}{2})$$

Ainsi, le point de chute devrait être à l'Ouest du point de tir.

Cette expérience a été tentée au 17<sup>e</sup> siècle par le Père Mersenne. Elle a conduit à un échec : il est impossible de lancer un obus selon la verticale avec une précision suffisante pour mettre en évidence cette déviation

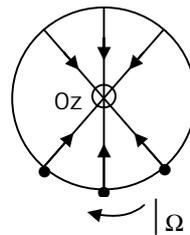
2<sup>e</sup> cas : mouvement d'un point matériel lié : pendule de Foucault

L'effet de  $\vec{F}_c$  sur un pendule simple est une rotation du plan d'oscillation du pendule, à la vitesse angulaire  $\Omega = -\omega \sin \lambda$ .

- { Dans l'hémisphère Nord,  $\Omega < 0$ , le plan d'oscillation tourne dans le sens rétrograde
- { Dans l'hémisphère Sud,  $\Omega > 0$ , le plan d'oscillation tourne dans le sens direct

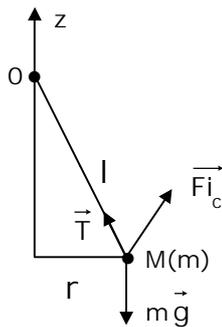
Sous nos latitudes, la période de rotation vaut :

$$T = \frac{2 \pi}{\omega \sin \lambda} \approx 32 \text{ h}$$



L'expérience a été réalisée au Panthéon par Foucault, en 1851, avec un pendule de longueur  $l = 67 \text{ m}$ .

Les traces laissées par le pendule sur du sable placé en périphérie mettent en évidence la rotation.



Appliquons le théorème du moment cinétique en O, en projection sur la verticale Oz :

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = m^t_{Oz} \quad (\vec{T}, m\vec{g}, \vec{F}_c)$$

$$\begin{cases} m^t(0) (\vec{T}) = \vec{0} \\ m^t_{Oz} (m\vec{g}) = 0 \quad (m\vec{g} // Oz) \end{cases}$$

Donc :  $\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = m^t_{Oz} (\vec{F}_c) = [\vec{OM} \wedge (-2 m \vec{\omega} \wedge \vec{V})] \cdot \vec{z}$

$$= + 2 m \omega \begin{vmatrix} x & \dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda & 0 \\ y & -\dot{x} \sin \lambda & 0 \\ z & \dot{x} \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}$$

Soit : 
$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = -2 m\omega [x \dot{x} \sin \lambda + y \dot{y} \sin \lambda - y \dot{z} \sin \lambda]$$

Pour de petites oscillations du pendule :

$$z \approx -l = \text{cste} \quad , \quad \dot{z}, \ddot{z} \approx 0$$

De plus :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x \dot{x} + y \dot{y} = r \dot{r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \right) \\ \sigma_{Oz} = mr^2 \dot{\theta} \end{cases}$$

On obtient donc : 
$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{d}{dt} (-r^2 \omega \sin \lambda)$$

Finalement : 
$$r^2 (\dot{\theta} + \omega \sin \lambda) = \text{cste}$$

Soit alors un point fictif M' tel que :

$$\begin{cases} r' = r \\ z' = z \\ \theta' = \theta + (\omega \sin \lambda) t \end{cases} \quad OM' = OM$$

Pour le point M' :  $r'^2 \dot{\theta}' = \text{cste}$  , et on se ramène au cas où  $\vec{F}_c = \vec{0}$  (mouvement au fond d'une calotte sphérique : cf 3.5 iii)).

La trajectoire projetée est une ellipse de centre O, décrite selon la loi des aires, cette ellipse se réduisant à une droite pour des C.I bien choisies.

Pour le point M :  $\theta = \theta' - (\omega \sin \lambda) t$  , ce qui correspond bien à une rotation du plan d'oscillation à la vitesse angulaire  $\Omega = -\omega \sin \lambda$ .

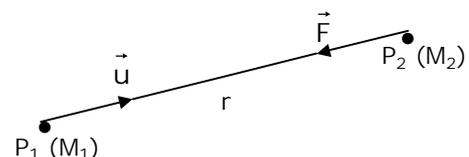
Rem. : Il existe d'autres effets perceptibles de la force d'inertie de Coriolis due à la rotation terrestre :

- |   |   |
|---|---|
| { | Sens de « rotation » des dépressions<br>(Sens direct dans l'hémisphère Nord, rétrograde dans l'hémisphère Sud)                        |
| { | Erosion des rives d'un fleuve (érosion plus grande de la rive droite dans l'hémisphère Nord, de la rive gauche dans l'hémisphère Sud) |
| { | Sens de « rotation » des plantes grimpantes   |

## II. Champ de gravitation – champ de pesanteur.

### II.1. Champ de gravitation.

- Loi de Newton : deux points matériels P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>, de masses de gravitation M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub>, sont en interaction attractive selon la loi :

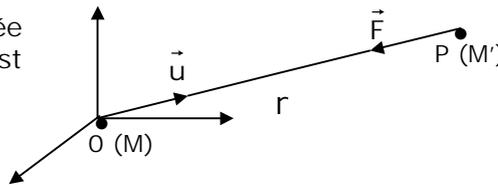


$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{F} = - \frac{g M_1 M_2}{r^2} \vec{u} = - \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

$$g = 6,67 \times 10^{-11} \text{SI} \quad (\text{cste universelle de la gravitation})$$

• Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle placée en O. Un point P de masse M' est soumis à la force :



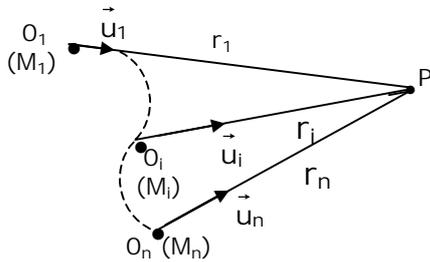
$$\vec{F} = - \frac{g M M'}{r^2} \vec{u}$$

On pose alors :  $\vec{F} = M' \vec{G}$ , si  $\vec{G}$  est le champ de gravitation créé, en P, par la masse M placée en O.

On a donc :

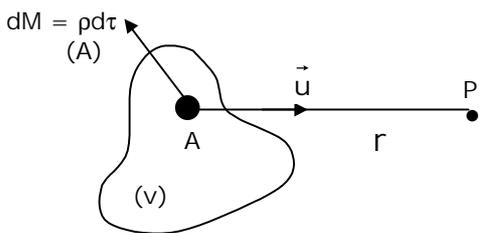
$$\vec{G} = - \frac{g M}{r^2} \vec{u} = - \frac{g M \vec{OP}}{OP^3}$$

• Champ de gravitation créé par une distribution quelconque de masse



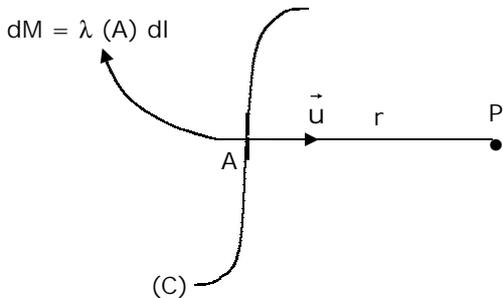
$$\vec{G}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i(P) = \sum_{i=1}^n - \frac{g M_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

(système de masses ponctuelles)



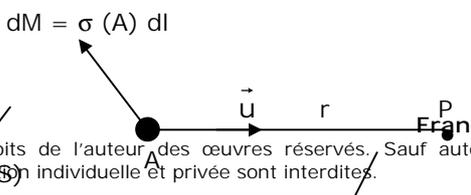
$$\vec{G}(P) = \iiint_{(v)} - g \rho_{(A)} dt \frac{\vec{u}}{r^2}$$

(distribution volumique de masse)



$$\vec{G}(P) = \int_{(C)} - g \lambda(A) dl \frac{\vec{u}}{r^2}$$

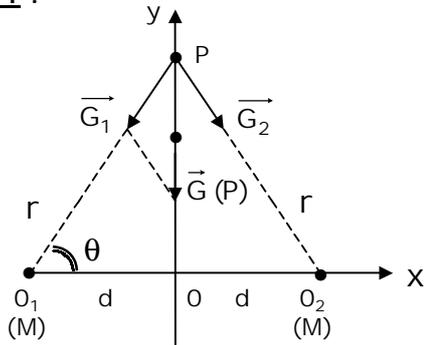
(distribution surfacique de masse)



$$\vec{G}(P) = \int_{(L)} - g \sigma(A) ds \frac{\vec{u}}{r^2}$$

(distribution linéique de masse)

**Exemple 1 :**



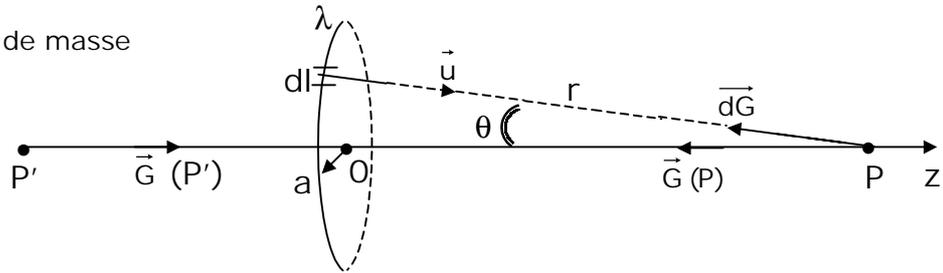
$$\vec{G}(P) = \vec{G}_1(P) + \vec{G}_2(P)$$

$$= 2 \|G_1\| \cos \theta (-\vec{y})$$

$$\|G_1\| = \frac{gM}{r^2} = \frac{gM \cos^2 \theta}{d^2}$$

$$\text{Soit : } \vec{G}(P) = -2 \frac{gM \cos^3 \theta}{d^2} \vec{y}$$

**Exemple 2 :** anneau de masse



Par symétrie (regrouper les éléments 2 à 2, symétriquement par rapport à 0) :

$$\vec{G}(P) = G(P) \vec{z} \quad , \quad \text{avec } G(P) < 0 \quad \text{si } z > 0$$

$$\vec{G}(P) = \oint_C \frac{-g \lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

$$G(P) = \oint_C \frac{-g \lambda dl}{r^2} \cos \theta = - \frac{g \lambda \cos \theta}{r^2} \underbrace{\oint_C dl}_{2 \Pi a} \quad , \quad \text{avec } \cos \theta = \frac{z}{r}$$

Si z est la cote du point P, on a donc :

$$G(z) = \frac{-2 \Pi \lambda a z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{pour } z > 0, \text{ la fonction } G(z) \text{ étant impaire})$$

