COMPLEMENTS (PCSI)

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

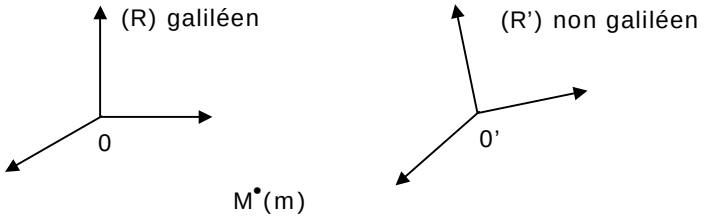
* *

I. Théorème de la dynamique pour le point matériel en référentiel non galiléen. 1
II. Champ de gravitation – champ de pesanteur. 7
III. Termes de marée.s 16
IV. Rotation d'un solide autour d'un axe fixe. 18

* *

I. Théorème de la dynamique pour le point matériel en référentiel non galiléen.

I.1. RFD :



On a :
$$\begin{cases} m\vec{a} = \Sigma\vec{F} & \textit{(RFD dans (R))} \\ \vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_e} + \vec{a_c} & \textit{(composition des accélérations)} \end{cases}$$

En posant :
$$\begin{cases} \vec{Fi_e} = -m\vec{a_e} \text{ , force d'inertie d'entraînement} \\ \vec{Fi_c} = -m\vec{a_c} \text{ , force d'inertie de Coriolis} \end{cases}$$
$$= -2m\,\vec{\Omega_e} \wedge \vec{V'}$$

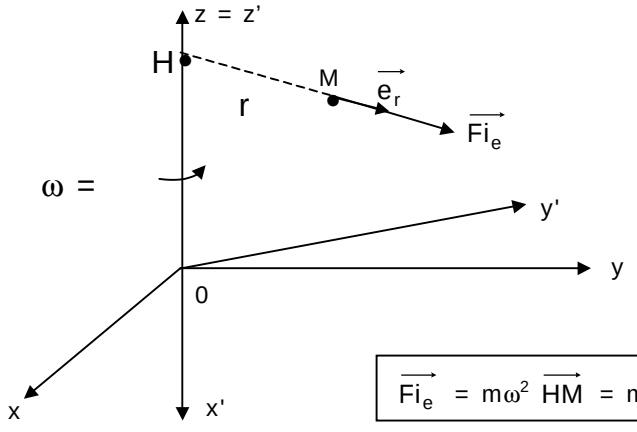
On obtient la RFD dans (R') non galiléen :

$$\boxed{m\vec{a} = \Sigma\vec{F_{ext}} + \vec{Fi_e} + \vec{Fi_c}}$$

Il suffit donc d'ajouter à $\Sigma\vec{F_{ext}}$ les forces d'inertie, d'entraînement et de Coriolis.

Cas particuliers :

(R') en rotation uniforme autour de (R).



$$\vec{a_e} = -\omega^2\vec{HM}$$
$$= -\omega^2 r\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{Fi_e} = m\omega^2\vec{HM} = m\omega^2 r\,\vec{e_r}}$$

(Force d'inertie « centrifuge »)

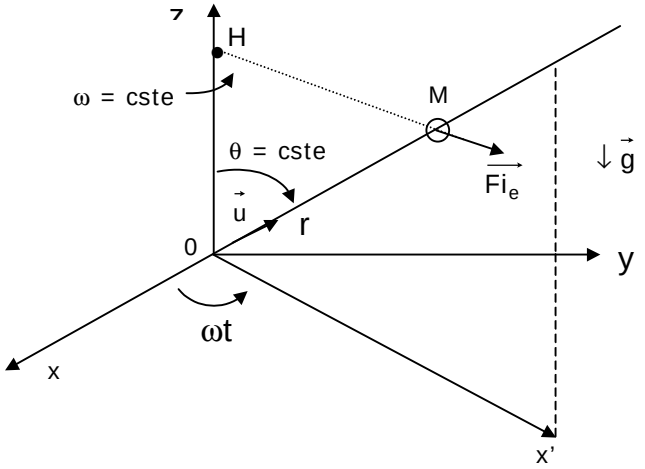
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

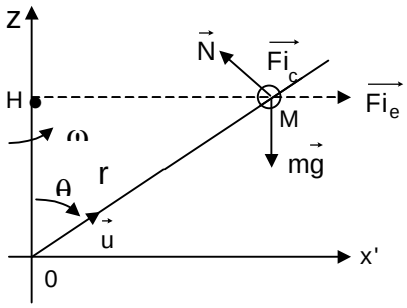
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

On peut remarquer que, dans ce cas, $\overrightarrow{Fi_e}$ est une force conservatrice :

$$\begin{cases} \overrightarrow{Fi_e} = -\overrightarrow{grad}\left(-\frac{1}{2} m\omega^2 r^2\right) = -\overrightarrow{grad}\ E_{Pi_e} \\ E_{Pi_e} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \text{ est l'énergie potentielle dont dérive la force centrifuge} \end{cases}$$

Exemple : Considérons un anneau coulissant sans frottement sur une tige décrivant un cône de demi-angle au centre θ, à la vitesse angulaire ω = cste. On cherche r(t) = OM(t).





Dans (R') lié à la tige :

$$m\vec{a}' = \vec{N} + m\vec{g} + \overrightarrow{Fi_e} + \overrightarrow{Fi_c}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{Fi_e} = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \\ \overrightarrow{Fi_c} = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}' \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} HM = r \sin\theta \\ \vec{V}' = \overset{o}{r}\,\vec{u} \ ; \ \vec{a}' = \overset{oo}{r}\,\vec{u} \end{cases}$$

En projection sur $\vec{u}$, on tire :

$$m\overset{oo}{r} = -mg\cos\theta + (m\omega^2 r \sin\theta)\sin\theta$$

Soit :

$$\boxed{\overset{oo}{r} - \Omega^2 r = -g\cos\theta \quad , \text{ si } \Omega = \omega\sin\theta}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$r(t) = (\alpha\,\mathrm{ch}\,\Omega t + \beta\,\mathrm{sh}\,\Omega t) + \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}$$

En supposant : $\begin{cases} r(0) = r_0 \end{cases}$ *(point lâché sans vitesse de la distance r_0)* :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

$$\overset{o}{r}(0) = 0$$

$$\begin{cases} r_0 = \alpha = \dfrac{g\cos\theta}{r^2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc : $$\boxed{r(t) = (r_0 - \frac{g\cos\theta}{\Omega^2})\,\mathrm{ch}\,\Omega t + \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}}$$

On retrouve les deux types de mouvement relatif prévisibles a priori.

1er cas : $r_0 > \dfrac{g\cos\theta}{\Omega^2}$ (r_0 élevé », ω « élevée »)

Alors $\begin{cases} r(t) \to -\infty \\ t \to \infty \end{cases}$; en pratique l'anneau sera « éjecté » au bout d'un temps fini (la force centrifuge l'emporte sur le poids). Cette condition est bien sûr toujours réalisée pour $\theta \geq \Pi/2$.

2e cas : $r_0 < \dfrac{g\cos\theta}{\Omega^2}$ (r_0 « faible », ω « faible »)

Alors $\begin{cases} r(t) \to -\infty \\ t \to \infty \end{cases}$; en pratique l'anneau tombe en 0 ($r = 0$) au bout d'un temps fini (le poids l'emporte sur la force centrifuge).

Cette condition est bien sur toujours réalisée pour $\theta = 0$ ($Fi_e = 0$).

I.2. Théorèmes énergétiques.

La force d'inertie de Coriolis, perpendiculaire à $\vec{V}'$, ne travaille pas dans (R').

Il suffit donc, par rapport à (R), de rajouter le travail de $\overrightarrow{Fi_e}$ dans les théorèmes énergétiques :

$$\begin{cases} dE'_C = \delta W' (\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{Fi_e}) \\ \Delta E'_C = W' (\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{Fi_e}) \end{cases} \text{TEC}$$

$$\frac{dE'_C}{dt} = P' (\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{Fi_e}) \quad \text{TPC}$$

$$dE'_m = \underbrace{\delta W'_{NC}} \quad \text{TEM}$$

y compris $\delta W' (\overrightarrow{Fi_e})$ si $\overrightarrow{Fi_e}$ est NC

I.3. Cas du référentiel « Terrestre ».

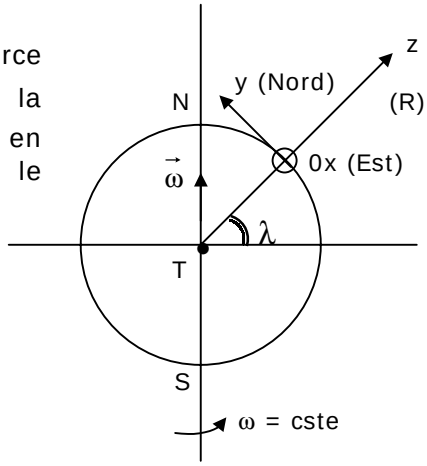
Nous supposerons ici que le référentiel <u>géocentrique</u> est <u>galiléen</u>, et que $\vec{g} \approx \vec{G} = -g\vec{z}$ est uniforme (mouvement du voisinage du sol, cf. II).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Nous verrons alors (cf. toujours II) que cette dernière hypothèse revient implicitement à négliger la force centrifuge $\overrightarrow{Fi_e}$ due à la rotation terrestre.

Nous ne nous intéressons donc qu'à la force de Coriolis $\overrightarrow{Fi_c} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}$ due à la rotation terrestre, et cherchons à mettre en évidence certains de ses effets sur le mouvement d'un point matériel.



$$\vec{\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ \omega\cos\lambda \\ \omega\sin\lambda \end{vmatrix} \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Si $\vec{V} = \vec{V}(M/R)$ $\begin{vmatrix} \overset{o}{x} \\ \overset{o}{y} \\ \overset{o}{z} \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{Fi_c} = +2m\omega$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ $\begin{vmatrix} \overset{o}{y}\sin\lambda - \overset{o}{z}\cos\lambda \\ -\overset{o}{x}\sin\lambda \\ \overset{o}{x}\cos\lambda \end{vmatrix}$ (en un lieu de latitude λ)

Comme ω est « faible », l'effet de $\overrightarrow{Fi_c}$ est « faible », et nous négligerons les termes d'ordre supérieur à 1 en ω.

1er cas : mouvement d'un point matériel libre

Dans (R) non galiléen, l'équation du mouvement est :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

Pour développer $\overrightarrow{Fi_c}$ au 1er ordre en ω, il suffit de développer $\vec{V}$ à l'ordre 0 en ω, soit :

$$\vec{V} \approx \vec{V_0} + \vec{g}t \qquad (\overrightarrow{V_0} \text{ vitesse initiale})$$

Ainsi, au 1er ordre en ω :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \approx \vec{g} - 2\vec{\omega} \wedge (\vec{V_0} + \vec{g}t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \approx \vec{g}t + \vec{V_0} - 2(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_0})\,t - (\vec{\omega} \wedge \vec{g})\,t^2$$

Puis :

$$\overrightarrow{OM} \approx (\overrightarrow{OM_0} + \vec{V_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2) \underbrace{- (\vec{\omega} \wedge \vec{V_0})\,t^2 - \frac{1}{3}(\vec{\omega} \wedge \vec{g})\,t^3}_{\text{Termes « correctifs »}}$$

(1)

Nous obtenons ci-dessus l'équation du mouvement de chute libre, avec $\overrightarrow{Fi_c}$, valable pour toutes conditions initiales.
Prenons 2 exemples simples de CI :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

1er exemple : $\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = z_0 \vec{z} \\ \overrightarrow{V_0} = \vec{O} \end{cases}$

On lâche un point sans vitesse de l'altitude z_0

$$\vec{\omega} \wedge \vec{g} \quad = \quad \omega g \begin{vmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$$

Donc, en projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, l'équation (1) donne :

$$\begin{cases} x(t) \approx \frac{1}{3} \omega g \cos\lambda \, t^3 \\ y(t) \approx 0 \\ z(t) \approx -\frac{1}{2} g t^2 + z_0 \end{cases}$$

Le point de chute correspond à $z = 0$.

L'instant de chute est $t_1 = \sqrt{\frac{2 z_0}{g}}$.

Alors : $x(t_1) = x_1 = \frac{1}{3} \omega g \cos\lambda \, t_1^3$

Soit : $\boxed{x_1 = \frac{1}{3} \omega g \cos\lambda \left(\frac{2 z_0}{g} \right)^{3/2} > 0}$ $\quad (\lambda \neq \pm \frac{\Pi}{2})$

Dans tous les cas (hémisphère nord ou sud, sauf aux pôles), le point de chute est à l'est de M_0 : on parle de « déviation vers l'Est ».
Numériquement : $x_1 \approx 1{,}5$ cm si $z_0 = 100$m. Ce phénomène a pu être mis en évidence expérimentalement, dans une zone de calme atmosphérique. (Expérience de Cassini, vers 1830).

2e exemple : $\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = \vec{O} \\ \overrightarrow{V_0} = V_0 \vec{z}, \quad V_0 > 0 \end{cases}$

On lance un obus selon la verticale, et on cherche le point de chute.

En projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, (1) donne cette fois :

$$\begin{cases} x(t) \approx \frac{1}{3} \omega g \cos\lambda \, t^3 - \omega V_O \cos\lambda \, t^2 \\ y(t) \approx 0 \\ z(t) \approx V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Ici : $t_1 = \frac{2 V_0}{g}$ et :

$$\boxed{x_1 = -\frac{4}{3}\omega g \cos\lambda \frac{V_0^3}{g^2} < 0} \qquad (\lambda \neq \pm \frac{\Pi}{2})$$

Ainsi, le point de chute devrait être à l'Ouest du point de tir.

Cette expérience a été tentée au 17e siècle par le Père Mersenne. Elle a conduit à un échec : il est impossible de lancer un obus selon la verticale avec une précision suffisante pour mettre en évidence cette déviation

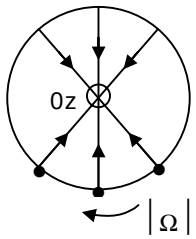
2e cas : mouvement d'un point matériel lié : pendule de Foucault

L'effet de $\overrightarrow{Fi_c}$ sur un pendule simple est une rotation du plan d'oscillation du pendule, à la vitesse angulaire $\Omega = -\omega \sin\lambda$.

- Dans l'hémisphère Nord, $\Omega < 0$, le plan d'oscillation tourne dans le sens rétrograde
- Dans l'hémisphère Sud, $\Omega > 0$, le plan d'oscillation tourne dans le sens direct

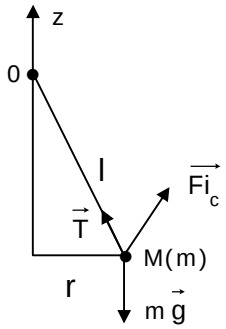
Sous nos latitudes, la période de rotation vaut :

$$T = \frac{2\Pi}{\omega \sin\lambda} \approx 32 \text{ h}$$



L'expérience a été réalisée au Panthéon par Foucault, en 1851, avec un pendule de longueur l = 67 m.

Les traces laissées par le pendule sur du sable placé en périphérie mettent en évidence la rotation.



Appliquons le théorème du moment cinétique en 0, en projection sur la verticale 0z :

$$\frac{d\sigma_{0z}}{dt} = m^t_{0z} \qquad (\vec{T}, m\vec{g}, \overrightarrow{Fi_c})$$

$$\begin{cases} \vec{m}^t(0)(\vec{T}) = \vec{0} \\ m^t_{0z}(m\vec{g}) = 0 \qquad (m\vec{g} \;//\; 0z) \end{cases}$$

Donc : $$\frac{d\sigma_{0z}}{dt} = m^t_{0z}(\overrightarrow{Fi_c}) = [\overrightarrow{OM} \wedge (-2 m \vec{\omega} \wedge \vec{V}].\vec{z}$$

$$= +2 m\omega \begin{vmatrix} x & \overset{o}{y}\sin\lambda - \overset{o}{z}\cos\lambda & 0 \\ y & -\overset{o}{x}\sin\lambda & 0 \\ z & \overset{o}{x}\cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Soit : $\frac{d\sigma_{0z}}{dt} = -2m\omega [x\overset{o}{x}\sin\lambda + y\overset{o}{y}\sin\lambda - y\overset{o}{z}\sin\lambda]$

Pour de petites oscillations du pendule :

$$z \approx -l = cste \quad , \quad \overset{o}{z} , \overset{oo}{z} \approx 0$$

De plus : $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x\overset{o}{x} + y\overset{o}{y} = r\overset{o}{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right) \\ \sigma_{0z} = mr^2\overset{o}{\theta} \end{cases}$

On obtient donc : $\frac{d}{dt}(r^2\overset{o}{\theta}) = \frac{d}{dt}(-r^2\omega\sin\lambda)$

Finalement : $\boxed{r^2(\overset{o}{\theta} + \omega\sin\lambda) = cste}$

Soit alors un point fictif M' tel que :

$$\begin{cases} r' = r \\ z' = z \end{cases} \Big) OM' = OM$$
$$\theta' = \theta + (\omega\sin\lambda)\,t$$

Pour le point M' : $r'^2\,\overset{o}{\theta}' = cste$, et on se ramène au cas où $\overrightarrow{Fi_c} = \vec{O}$ (mouvement au fond d'une calotte sphérique : cf 3.5 iii)).

La trajectoire projetée est une ellipse de centre 0, décrite selon la loi des aires, cette ellipse se réduisant à une droite pour des C.I bien choisies.

Pour le point M : $\theta = \theta' - (\omega\sin\lambda)\,t$, ce qui correspond bien à une rotation du plan d'oscillation à la vitesse angulaire $\Omega = -\omega\sin\lambda$.

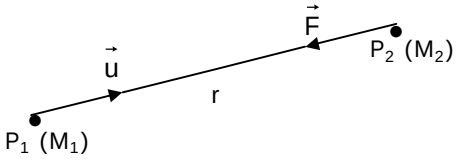
Rem. : Il existe d'autres effets perceptibles de la force d'inertie de Coriolis due à la rotation terrestre :

- Sens de « rotation » des dépressions
  (Sens direct dans l'hémisphère Nord, rétrograde dans l'hémisphère Sud)
- Erosion des rives d'un fleuve (érosion plus grande de la rive droite dans l'hémisphère Nord, de la rive gauche dans l'hémisphère Sud)
- Sens de « rotation » des plantes grimpantes

II. Champ de gravitation – champ de pesanteur.

II.1. Champ de gravitation.

- Loi de Newton : deux points matériels P_1 et P_2, de masses de gravitation M_1 et M_2, sont en interaction attractive selon la loi :



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

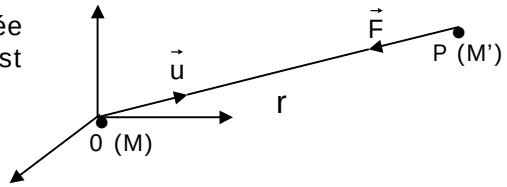
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \vec{F} = -\frac{g M_1 M_2}{r^2}\,\vec{u} = -\overrightarrow{F_{2\to 1}}$$

$g = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI *(cste universelle de la gravitation)*

- Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle placée en 0. Un point P de masse M' est soumis à la force :

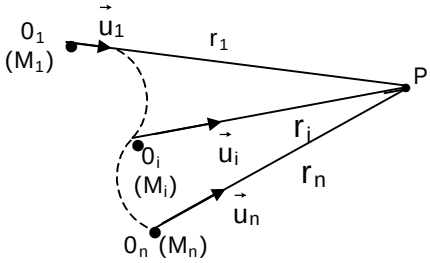


$$\vec{F} = -\frac{gMM'}{r^2}\vec{u}$$

On pose alors : $\vec{F} = M'\,\vec{G}$, si $\vec{G}$ est le champ de gravitation créé, en P, par la masse M placée en 0.

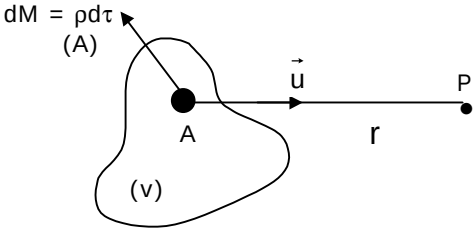
On a donc : $\vec{G} = -\frac{g M}{r^2}\vec{u} = -\frac{g M \overrightarrow{OP}}{OP^3}$

- Champ de gravitation créé par une distribution quelconque de masse



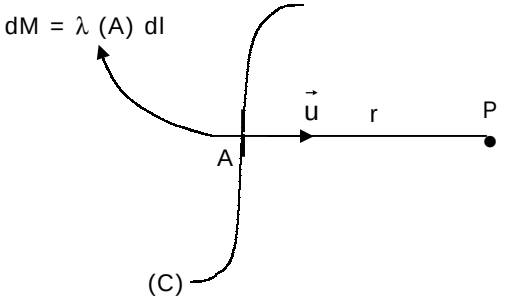
$$\vec{G}(P) = \sum_{i=1}^{n} \vec{G_i}(P) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{g M_i \vec{u_i}}{r_i^2}$$

(système de masses ponctuelles)



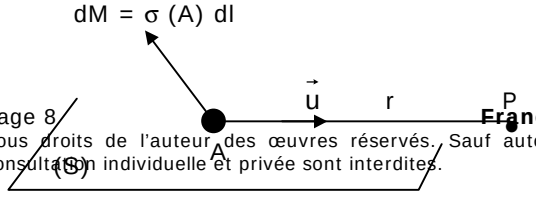
$$\vec{G}(P) = \iiint_{(v)} -g\,\rho_{(A)}\,d\tau\,\frac{\vec{u}}{r^2}$$

(distribution volumique de masse)



$$\vec{G}(P) = \int_{(C)} -g\,\lambda(A)\,dl\,\frac{\vec{u}}{r^2}$$

(distribution surfacique de masse)



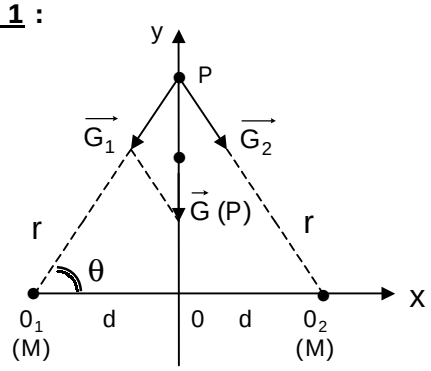
$$\vec{G}(P) = \iint_{(S)} -g\,\sigma(A)\,dS\,\frac{\vec{u}}{r^2}$$

(distribution linéique de masse)

François MORAND © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Exemple 1 :



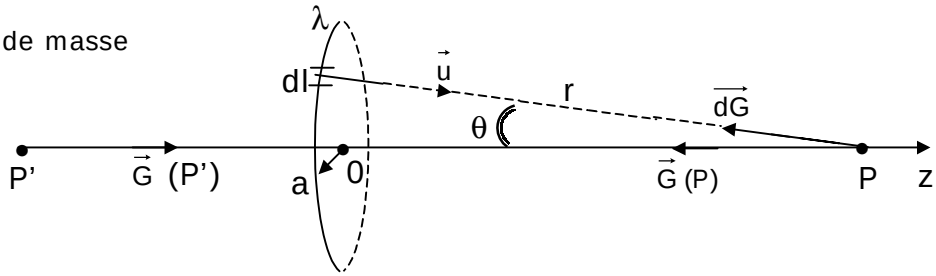
$$\vec{G}(P) = \vec{G_1}(P) + \vec{G_2}(P)$$

$$= 2 \left\| G_1 \right\| \cos\theta \, (-\vec{y})$$

$$\left\| G_1 \right\| = \frac{g M}{r^2} = \frac{g M \cos^2\theta}{d^2}$$

Soit : $\vec{G}(P) = -2 \dfrac{g M \cos^3\theta}{d^2} \vec{y}$

Exemple 2 : anneau de masse



Par symétrie (regrouper les éléments 2 à 2, symétriquement par rapport à 0) :

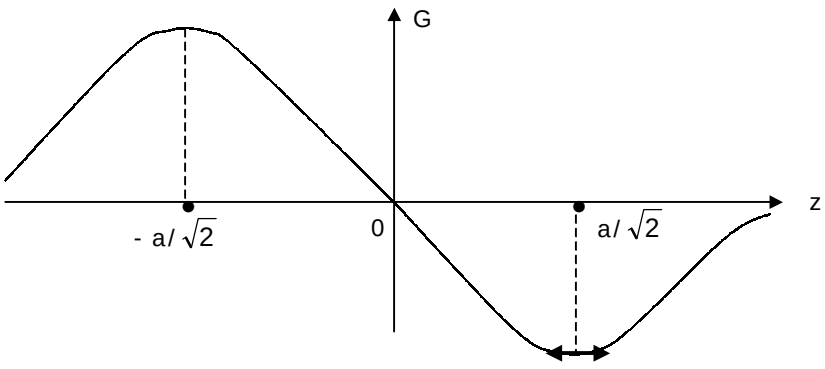
$$\vec{G}(P) = G(P)\,\vec{z} \quad , \quad \text{avec} \quad G(P) < 0 \quad \text{si } z > 0$$

$$\vec{G}(P) = \oint_C \frac{-g\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

$$G(P) = \oint_C \frac{-g\lambda dl}{r^2} \cos\theta = -\frac{g\lambda\cos\theta}{r^2} \underbrace{\oint dl}_{2\Pi a} \quad , \text{avec } \cos\theta = \frac{z}{r}$$

Si z est la cote du point P, on a donc :

$$G(z) = \frac{-2\Pi\lambda a z}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \quad \text{(pour } z > 0\text{, la fonction G(z) étant impaire)}$$



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.