Un opérateur de dérivation partielle

Notations

Ω est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow 0 < y < x$.
$\mathcal{E}$ est l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à valeurs réelles.
Pour tout f de $\mathcal{E}$, on note $T(f)$ l'application : $(x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
Il est clair qu'on définit ainsi un endomorphisme T de $\mathcal{E}$.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois).
Pour simplifier, on pourra noter $T^k f$ plutôt que $T^k(f)$.
Par convention, T^0 est l'identité de $\mathcal{E}$.

Première partie

1. Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, soit $f_{p,q}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_{p,q}(x,y) = x^p y^q$.
   (a) Pour tout (j,k) de $\mathbb{N}^2$, calculer $\dfrac{\partial^{j+k} f_{p,q}}{\partial x^j\, \partial y^k}$. [S]
   (b) Montrer que la famille des $f_{p,q}$, quand (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2$, est libre.
   Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par cette famille. [S]
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ engendré par les applications $f_{p,q}$ telles que $p+q \leq n$.
   Calculer la dimension de $\mathcal{P}_n$ et en donner une base. [S]

2. Soit f un élément non nul de $\mathcal{E}$, et soit λ un réel, tels que $Tf = \lambda f$.
   (a) Ecrire la relation vérifiée par g définie sur Ω par $g(x,y) = (x+y)^{-\lambda} f(x,y)$. [S]
   (b) Montrer que le changement de variable $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = y \end{cases}$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à préciser. [S]
   (c) Avec ce changement de variables, montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $f(x,y) = (x+y)^\lambda\, \varphi(x^2-y^2)$ pour tout (x,y) de Ω. [S]

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathcal{P}_n$ est stable par T.
   Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par T. A-t-on l'égalité $T(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$? [S]
   (b) Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, et tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_{p,q}(x,y) = f_{p,q}(x+y, x-y)$.
   Montrer que les $h_{p,q}$ forment une base de $\mathcal{P}$. [S]
   (c) Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, montrer qu'il existe un réel $\lambda_{p,q}$ tel que $T(h_{p,q}) = \lambda_{p,q}\, h_{p,q}$. [S]

4. Résoudre l'équation $2\,T^4 f - T^3 f - 6\,T^2 f - Tf + 2f = 0$ dans $\mathcal{P}$.
   Indication : factoriser $A = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$, et écrire f sur la base des $h_{p,q}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Deuxième partie

Pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on définit f dans $\mathcal{E}$ par $f(x,y) \equiv \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

On considère l'équation (E) : $T^2f + 2a\,Tf + bf = 0$, avec (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ et $a^2 \geq b$.

Il pourra être commode de noter $u = \dfrac{x}{y}$.

Pour tout réel γ, et tout $u > 1$, on note $\Psi_\gamma(u) = \left(\dfrac{u+1}{u-1}\right)^{\gamma/2}$.

1. Calculer Tf et T^2f en fonction des dérivées première et seconde de ψ. [S]
2. (a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par ψ pour que f vérifie (E). [S]

   (b) Déterminer les fonctions ψ telles que $Tf = \lambda f$, avec λ dans $\mathbb{R}$.
   A quelle condition sur λ la fonction f est-elle alors solution de (E) ?
   Déterminer ψ pour qu'il en soit ainsi. [S]
3. (a) On suppose $a^2 > b$. Soient α, β les solutions distinctes de $t^2 + 2at + b = 0$.
   Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est le plan engendré par Ψ_α et Ψ_β. [S]

   (b) On suppose $a^2 = b$. Déterminer l'ensemble des solutions f de l'équation (E).
   Indication : $(E) \Leftrightarrow (T + aI)(Tf + af) = 0 \Leftrightarrow Tf + af = \lambda\Psi_{-a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.