Un opérateur de dérivation partielle

Notations

Ω est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : $(x,y)\in\Omega \Leftrightarrow 0<y<x$.
$\mathcal{E}$ est l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à valeurs réelles.
Pour tout f de $\mathcal{E}$, on note $T(f)$ l'application : $(x,y)\mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
Il est clair qu'on définit ainsi un endomorphisme T de $\mathcal{E}$.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $T^k=T\circ T\circ\cdots\circ T$ (k fois).
Pour simplifier, on pourra noter T^kf plutôt que $T^k(f)$.
Par convention, T^0 est l'identité de $\mathcal{E}$.

Permière partie

1. Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, soit $f_{p,q}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_{p,q}(x,y)=x^py^q$.
   (a) Pour tout (j,k) de $\mathbb{N}^2$, calculer $\dfrac{\partial^{j+k}f_{p,q}}{\partial x^j\,\partial y^k}$. [S]
   (b) Montrer que la famille des $f_{p,q}$, quand (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2$, est libre.
   Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par cette famille. [S]
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ engendré par les applications $f_{p,q}$ telles que $p+q\le n$.
   Calculer la dimension de $\mathcal{P}_n$ et en donner une base. [S]
2. Soit f un élément non nul de $\mathcal{E}$, et soit λ un réel, tels que $Tf=\lambda f$.
   (a) Ecrire la relation vérifiée par g définie sur Ω par $g(x,y)=(x+y)^{-\lambda}f(x,y)$. [S]
   (b) Montrer que le changement de variable $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=y\end{cases}$ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à préciser. [S]
   (c) Avec ce changement de variables, montrer qu'il existe une application $\varphi:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $f(x,y)=(x+y)^\lambda\,\varphi(x^2-y^2)$ pour tout (x,y) de Ω. [S]
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathcal{P}_n$ est stable par T.
   Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par T. A-t-on l'égalité $T(\mathcal{P})=\mathcal{P}$? [S]
   (b) Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, et tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on pose $h_{p,q}(x,y)=f_{p,q}(x+y,x-y)$.
   Montrer que les $h_{p,q}$ forment une base de $\mathcal{P}$. [S]
   (c) Pour tout (p,q) de $\mathbb{N}^2$, montrer qu'il existe un réel $\lambda_{p,q}$ tel que $T(h_{p,q})=\lambda_{p,q}\,h_{p,q}$. [S]
4. Résoudre l'équation $2\,T^4f-T^3f-6\,T^2f-Tf+2f=0$ dans $\mathcal{P}$.
   Indication : factoriser $A=2x^4-x^3-6x^2-x+2$, et écrire f sur la base des $h_{p,q}$. [S]

Deuxième partie

Pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on définit f dans $\mathcal{E}$ par $f(x,y) \equiv \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.
On considère l'équation (E) : $T^2 f + 2a\,Tf + bf = 0$, avec (a,b) dans $\mathbb{R}^2$ et $a^2 \geq b$.
Il pourra être commode de noter $u = \dfrac{x}{y}$.
Pour tout réel γ, et tout $u > 1$, on note $\Psi_\gamma(u) = \left(\dfrac{u+1}{u-1}\right)^{\gamma/2}$.

1. Calculer Tf et $T^2 f$ en fonction des dérivées première et seconde de ψ. [S]
2. (a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par ψ pour que f vérifie (E). [S]
   (b) Déterminer les fonctions ψ telles que $Tf = \lambda f$, avec λ dans $\mathbb{R}$.
   A quelle condition sur λ la fonction f est-elle alors solution de (E) ?
   Déterminer ψ pour qu'il en soit ainsi. [S]
3. (a) On suppose $a^2 > b$. Soient α, β les solutions distinctes de $t^2 + 2at + b = 0$.
   Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est le plan engendré par Ψ_α et Ψ_β. [S]
   (b) On suppose $a^2 = b$. Déterminer l'ensemble des solutions f de l'équation (E).
   Indication : $(E) \Leftrightarrow (T + aI)(Tf + af) = 0 \Leftrightarrow Tf + af = \lambda\Psi_{-a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. [S]