Une famille d'arcs paramétrés

Pour tout réel a, on considère l'arc de $\mathbb{R}^2$ paramétré par $x(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)}$ et $y_a(t) = \dfrac{t(t-a)}{t^2-1}$.
On note Γ_a la courbe représentative de cet arc.

1. Montrer que Γ_{-a} se déduit de Γ_a par une transformation géométrique simple.
   Dans toute la suite, on se limitera donc à la condition $a \geq 0$. [S]
2. (a) Préciser le domaine d'étude de l'arc Γ_a. [S]
   (b) Indiquer les limites de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$ aux bornes du domaine d'étude. [S]
   (c) Préciser le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ par intervalles.
   On sera notamment amené à distinguer les cas $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.
   Si $0 < a < 1$, on placera les racines $t_1 < t_2$ de $y'(t)$ par rapport à $-1, 0, 1$. [S]
   (d) Dresser les tableaux de variations des arcs Γ_a en discutant suivant les valeurs de a.
   On considèrera les cas : $a = 0$, $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. [S]
3. Montrer que Γ_a admet un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour la valeur $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
   Étudier la nature de ce point stationnaire. [S]
4. (a) Indiquer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des courbes Γ_a. [S]
   (b) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers 1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote, ce qui conduira à considérer les cas $0 \leq a < 3/4$, $a = 3/4$ et $a > 3/4$. [S]
   (c) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers -1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette aysmptote. [S]
5. (a) Montrer que Γ_a n'admet de point double que si $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]
   (b) Donner un paramétrage du lieu décrit par ce point double quand $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]
6. (a) Montrer qu'une droite du plan rencontre Γ_a en au plus trois points. [S]
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3, pour que $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ soient alignés sur Γ_a. [S]
   (c) On suppose que la tangente au point $M(t)$ de Γ_a recoupe Γ_a en $M(t')$.
   Exprimer t' en fonction de t. Que se passe-t-il si $t = \frac{1}{2a}$? [S]
   (d) Déterminer combien chaque courbe Γ_a possède de points d'inflexion. [S]
7. Tracer les courbes Γ_a quand $a \in \{0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{12}{13}, 1, 2\}$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Corrigé du problème

1. Notons $M_a(t) = \left(\dfrac{1}{t(t^2-1)}, \dfrac{t(t-a)}{t^2-1}\right)$ le point de paramètre t de la courbe Γ_a.

   On constate que $M_{-a}(-t)$ et $M_a(t)$ ont même ordonnée et des abscisses opposées.

   La courbe Γ_{-a} se déduit donc de Γ_a par la symétrie orthogonale par rapport à Oy. [Q]

2. (a) Si $a > 0$, il n'y a pas de réduction évidente du domaine d'étude $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

   Si $a = 0$, les points $M_0(t)$ et $M_0(-t)$ sont symétriques par rapport à Oy (c'est un cas particulier de la symétrie qui échange les courbes Γ_a et Γ_{-a}.)

   Si $a = 0$ on peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. [Q]

   (b) On a $\begin{cases} \lim\limits_{t\to(-1)^-} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to(-1)^-} y_a(t) = +\infty \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{t\to(-1)^+} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to(-1)^+} y_a(t) = -\infty \end{cases}$

   De même $\lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0^-} y_a(t) = 0^-$, $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to 0^+} y_a(t) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 0 \\ 0^- & \text{si } a = 0 \end{cases}$

   $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = +\infty \end{cases}$, $\lim\limits_{t\to 1^-} y_a(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$, et $\lim\limits_{t\to 1^+} y_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$

   Enfin $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} y_a(t) = 1$. Le point $(0, 1)$ est donc un "point-limite".

   Plus précisément, $\dfrac{y_a(t) - 1}{x(t)} = t(1 - at)$ tend vers ∞ quand $t \to \infty$. On en déduit la présence d'une tangente verticale au point-limite. [Q]

   (c) Pour tout $a \geq 0$ et tout t de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on trouve :

   $x'(t) = \dfrac{1 - 3t^2}{t^2(t^2-1)^2}$, nul pour $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, strictement positif si $|t| < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

   $y'_a(t) = \dfrac{(2t-a)(t^2-1) - (t^2-at)(2t)}{(t^2-1)^2} = \dfrac{at^2 - 2t + a}{(t^2-1)^2}$.

   Pour trouver le signe de $y'_a(t)$ par intervalles, on discute suivant les valeurs de a.

   Tout d'abord, si $a = 0$, on a $y'_a(t) = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$, nul en 0, négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Supposons donc $a > 0$. Le discriminant de $P_a(t) = at^2 - 2t + a$ est $\Delta' = 1 - a^2$.

   – Si $0 < a < 1$, $P_a(t)$ s'annule en $t_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a}$ et $t_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1-a^2}}{a}$ $(t_1 < t_2)$

   P_a est strictement négatif sur $]t_1, t_2[$ et strictement positif si $t \notin [t_1, t_2]$.

   Pour le tableau des variations, il faut placer t_1 et t_2 par rapport à $-1, 0, 1$.

   On voit que $P_a(-1) = 2(a+1) > 0$, $P_a(0) = a > 0$, et $P_a(1) = 2(a-1) < 0$.

   On en déduit les inégalités $-1 < 0 < t_1 < 1 < t_2$.

   Il faut également placer t_1, t_2 par rapport à $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, valeurs qui annulent $x'(t)$.

   Pour $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est évident. Sinon $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   La valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ étant bien sûr dans $]0, 1[$, on distingue trois cas :

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

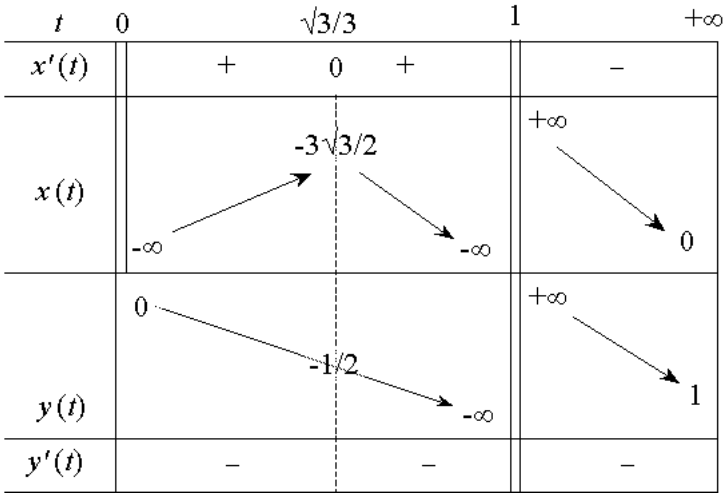
- Si $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ donc $t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_2$.
  Dans le tableau des variations, on verra : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2$.
- Si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ donc $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ici $t_2 = \sqrt{3}$.)
  On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2 = \sqrt{3}$.
- Si $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, alors $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$ donc $\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [t_1, t_2]$.
  On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 < 1 < t_2$.

– Si $a = 1$, on trouve $y_a(t) = \dfrac{t}{t+1}$ et $y_a'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$.
Dans ce cas, on prolonge y_a et y_a' en $t = 1$ par les valeurs $y_a(1) = \dfrac{1}{2}$ et $y_a'(1) = \dfrac{1}{4}$.

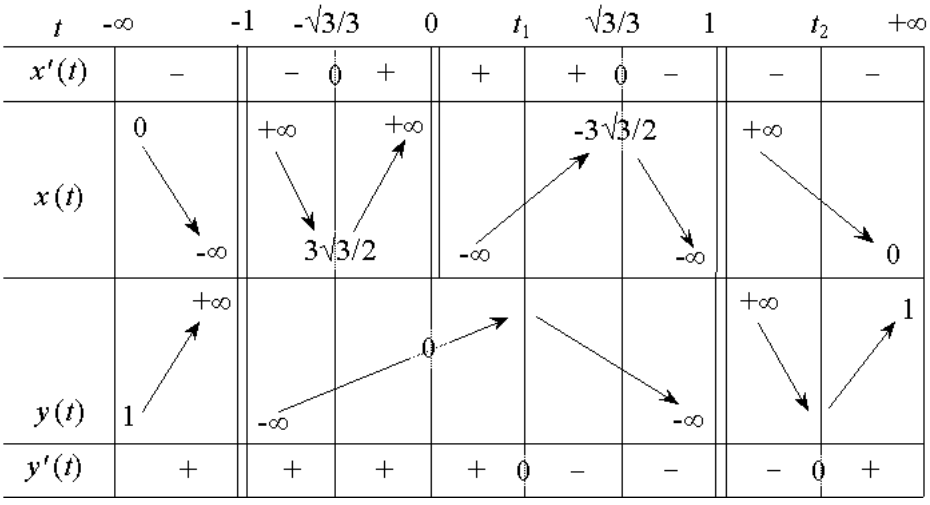
– Si $a > 1$, $y_a'(t) = \dfrac{at^2 - 2t + a}{(t^2-1)^2}$ ne s'annule pas, et reste > 0 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Dans tous les cas, on connait donc le signe de $x'(t)$ et de $y_a'(t)$ par intervalles. On en déduit le sens de variation des applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$. [Q]

(d) Voici le tableau des variations pour $a = 0$.

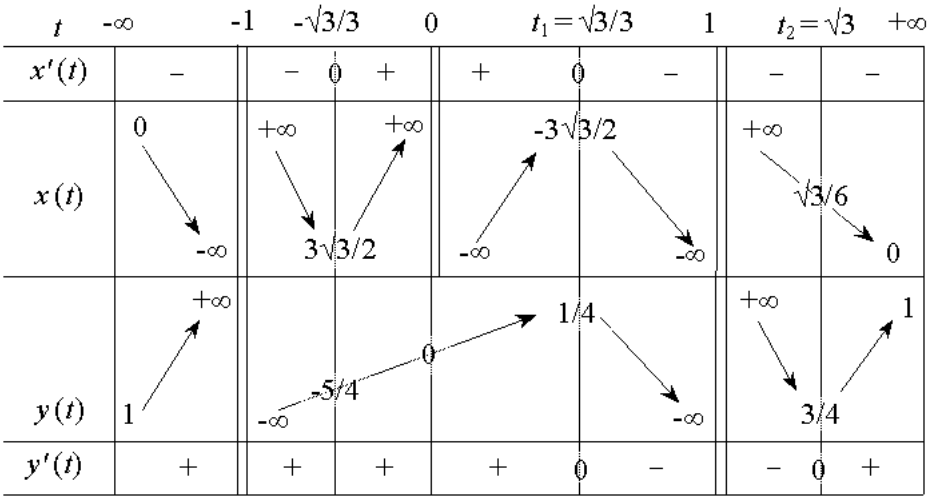


Voici le tableau des variations pour $0 < a < \sqrt{3}/2$.

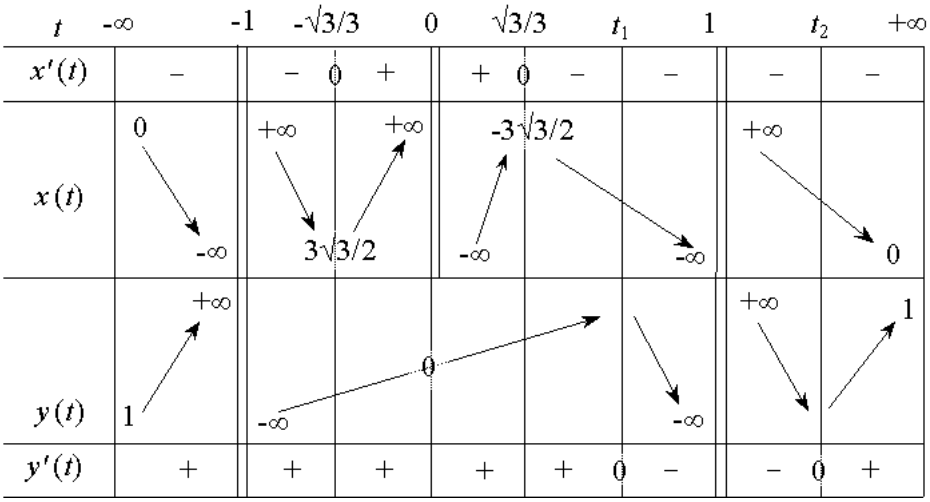


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

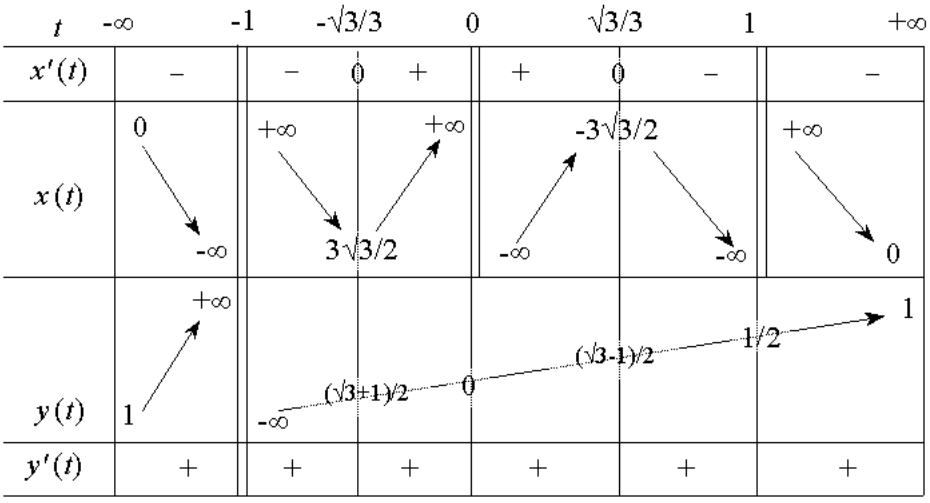
Voici le tableau des variations pour $a = \sqrt{3}/2$.



Voici le tableau des variations pour $\sqrt{3}/2 < a < 1$.

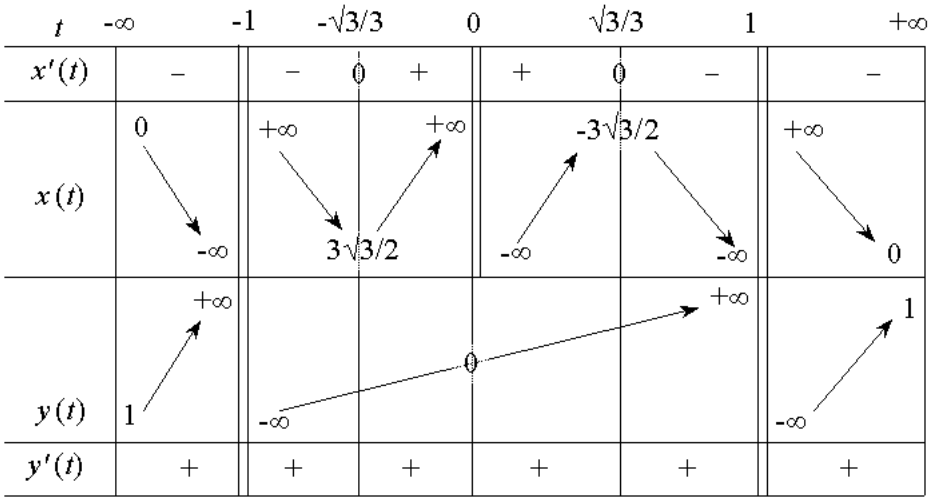


Voici le tableau des variations pour $a = 1$.



 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Voici le tableau des variations pour $a > 1$.



[Q]

3. L'étude précédente montre que Γ_a a un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pour le décrire, on peut effectuer un développement limité de $t \mapsto x(t)$ et de $t \mapsto y_a(t)$ au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc au voisinage de 0 après avoir posé $t = \frac{\sqrt{3}}{3} + h$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2-1} &= \frac{1}{-\frac{2}{3} + 2h\frac{\sqrt{3}}{3} + h^2} = \frac{-3}{2\left(1 - \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right)\right)} \\ &= -\frac{3}{2}\left(1 + \left(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\right) + \left(3h^2 + 3\sqrt{3}\,h^3\right) + \left(3\sqrt{3}\,h^3\right)\right) \\ &= -\frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,h + \frac{9}{2}\,h^2 + 6\sqrt{3}\,h^3 + o(h^3)\right)\end{aligned}$$

De même $\dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,h} = \sqrt{3}\left(1 - \sqrt{3}\,h + 3h^2 - 3\sqrt{3}\,h^3 + o(h^3)\right)$.

Ainsi :

$x(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{9}{2}\,h^2 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,h^3 + o(h^3)\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{27\sqrt{3}}{4}\,h^2 - \dfrac{27}{4}\,h^3 + o(h^3)$.

On remarque ensuite que $y_a(t) = \dfrac{t(t-a)}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1-at}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1-\sqrt{3}\,h}{2(t^2-1)}$.

On en déduit :

$y_a(t) = 1 - \frac{3}{4}(1-\sqrt{3}\,h)\left(1 + \sqrt{3}\,h + \frac{9}{2}\,h^2 + 6\sqrt{3}\,h^3 + o(h^3)\right) = \frac{1}{4} - \frac{9}{8}\,h^2 - \frac{9\sqrt{3}}{8}\,h^3 + o(h^3)$

Pour $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $M(t_0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $U = \frac{9}{8}\begin{pmatrix}-6\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ et $V = \frac{9}{8}\begin{pmatrix}-6\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

On a donc obtenu : $M(t) = M(t_0) + h^2U + h^3V + \vec{o}(h^3)$

Le vecteur U dirige la tangente à l'arc en $M(t_0)$, et U, V sont libres.

Dans le repère $(M(t_0), U, V)$ les coordonnées $X(t), Y(t)$ de $M(t)$ vérifient $\begin{cases} X(t) \sim (t-t_0)^2 \\ Y(t) \sim (t-t_0)^3 \end{cases}$

Cela signifie que Γ_a présente en $M(t_0)$ un rebroussement de première espèce.

Il y a une autre méthode, qui consiste à calculer les dérivées successives (jusqu'à la troisième) des applications $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y_a(t)$, et de les évaluer en $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.