Une famille d'arcs paramétrés

Pour tout réel a, on considère l'arc de $\mathbb{R}^2$ paramétré par $x(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)}$ et $y_a(t) = \dfrac{t(t-a)}{t^2-1}$.
On note Γ_a la courbe représentative de cet arc.

1. Montrer que Γ_{-a} se déduit de Γ_a par une transformation géométrique simple.
   Dans toute la suite, on se limitera donc à la condition $a \geq 0$. [S]
2. (a) Préciser le domaine d'étude de l'arc Γ_a. [S]

   (b) Indiquer les limites de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$ aux bornes du domaine d'étude. [S]

   (c) Préciser le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ par intervalles.
   On sera notamment amené à distinguer les cas $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.
   Si $0 < a < 1$, on placera les racines $t_1 < t_2$ de $y'(t)$ par rapport à $-1, 0, 1$. [S]

   (d) Dresser les tableaux de variations des arcs Γ_a en discutant suivant les valeurs de a.
   On considèrera les cas : $a = 0$, $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. [S]
3. Montrer que Γ_a admet un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour la valeur $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
   Étudier la nature de ce point stationnaire. [S]
4. (a) Indiquer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des courbes Γ_a. [S]

   (b) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers 1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette asymptote, ce qui conduira à considérer les cas $0 \leq a < 3/4$, $a = 3/4$ et $a > 3/4$. [S]

   (c) Étudier soigneusement l'asymptote oblique obtenue quand t tend vers -1. On précisera notamment le placement de la courbe par rapport à cette aysmptote. [S]
5. (a) Montrer que Γ_a n'admet de point double que si $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]

   (b) Donner un paramétrage du lieu décrit par ce point double quand $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$. [S]
6. (a) Montrer qu'une droite du plan rencontre Γ_a en au plus trois points. [S]

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3, pour que $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ soient alignés sur Γ_a. [S]

   (c) On suppose que la tangente au point $M(t)$ de Γ_a recoupe Γ_a en $M(t')$.
   Exprimer t' en fonction de t. Que se passe-t-il si $t = \frac{1}{2a}$? [S]

   (d) Déterminer combien chaque courbe Γ_a possède de points d'inflexion. [S]
7. Tracer les courbes Γ_a quand $a \in \{0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{12}{13}, 1, 2\}$. [S]

Corrigé du problème

1. Notons $M_a(t) = \left(\dfrac{1}{t(t^2-1)}, \dfrac{t(t-a)}{t^2-1}\right)$ le point de paramètre t de la courbe Γ_a.

   On constate que $M_{-a}(-t)$ et $M_a(t)$ ont même ordonnée et des abscisses opposées.

   La courbe Γ_{-a} se déduit donc de Γ_a par la symétrie orthogonale par rapport à Oy. [Q]

2. (a) Si $a > 0$, il n'y a pas de réduction évidente du domaine d'étude $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

   Si $a = 0$, les points $M_0(t)$ et $M_0(-t)$ sont symétriques par rapport à Oy (c'est un cas particulier de la symétrie qui échange les courbes Γ_a et Γ_{-a}.)

   Si $a = 0$ on peut donc limiter l'étude à $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. [Q]

   (b) On a $\begin{cases} \lim\limits_{t\to(-1)^-} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to(-1)^-} y_a(t) = +\infty \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{t\to(-1)^+} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to(-1)^+} y_a(t) = -\infty \end{cases}$

   De même $\lim\limits_{t\to0^-} x(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to0^-} y_a(t) = 0^-$, $\lim\limits_{t\to0^+} x(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to0^+} y_a(t) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a > 0 \\ 0^- & \text{si } a = 0 \end{cases}$

   $\begin{cases} \lim\limits_{t\to1^-} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to1^+} x(t) = +\infty \end{cases}$, $\lim\limits_{t\to1^-} y_a(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$, et $\lim\limits_{t\to1^+} y_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ 1/2 & \text{si } a = 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$

   Enfin $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} y_a(t) = 1$. Le point $(0, 1)$ est donc un “point-limite”.

   Plus précisément, $\dfrac{y_a(t)-1}{x(t)} = t(1-at)$ tend vers ∞ quand $t \to \infty$. On en déduit la présence d'une tangente verticale au point-limite. [Q]

   (c) Pour tout $a \geq 0$ et tout t de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on trouve :

   $x'(t) = \dfrac{1-3t^2}{t^2(t^2-1)^2}$, nul pour $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, strictement positif si $|t| < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

   $y_a'(t) = \dfrac{(2t-a)(t^2-1)-(t^2-at)(2t)}{(t^2-1)^2} = \dfrac{at^2-2t+a}{(t^2-1)^2}$.

   Pour trouver le signe de $y_a'(t)$ par intervalles, on discute suivant les valeurs de a.

   Tout d'abord, si $a = 0$, on a $y_a'(t) = \dfrac{-2t}{(t^2-1)^2}$, nul en 0, négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Supposons donc $a > 0$. Le discriminant de $P_a(t) = at^2 - 2t + a$ est $\Delta' = 1 - a^2$.

   – Si $0 < a < 1$, $P_a(t)$ s'annule en $t_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ et $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ $(t_1 < t_2)$

     P_a est strictement négatif sur $]t_1, t_2[$ et strictement positif si $t \notin [t_1, t_2]$.

     Pour le tableau des variations, il faut placer t_1 et t_2 par rapport à $-1, 0, 1$.

     On voit que $P_a(-1) = 2(a+1) > 0$, $P_a(0) = a > 0$, et $P_a(1) = 2(a-1) < 0$.

     On en déduit les inégalités $-1 < 0 < t_1 < 1 < t_2$.

     Il faut également placer t_1, t_2 par rapport à $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, valeurs qui annulent $x'(t)$.

     Pour $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c'est évident. Sinon $P_a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

     La valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ étant bien sûr dans $]0, 1[$, on distingue trois cas :

- Si $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) < 0$ donc $t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_2$.
  Dans le tableau des variations, on verra : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2$.
- Si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $P_a\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 0$ donc $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ici $t_2 = \sqrt{3}$.)
  On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < t_2 = \sqrt{3}$.
- Si $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, alors $P_a\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) > 0$ donc $\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [t_1, t_2]$.
  On a alors les inégalités : $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 < 1 < t_2$.

– Si $a = 1$, on trouve $y_a(t) = \dfrac{t}{t+1}$ et $y_a'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$.
Dans ce cas, on prolonge y_a et y_a' en $t = 1$ par les valeurs $y_a(1) = \dfrac{1}{2}$ et $y_a'(1) = \dfrac{1}{4}$.

– Si $a > 1$, $y_a'(t) = \dfrac{at^2 - 2t + a}{(t^2-1)^2}$ ne s'annule pas, et reste > 0 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Dans tous les cas, on connait donc le signe de $x'(t)$ et de $y_a'(t)$ par intervalles. On en déduit le sens de variation des applications $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y_a(t)$. [Q]

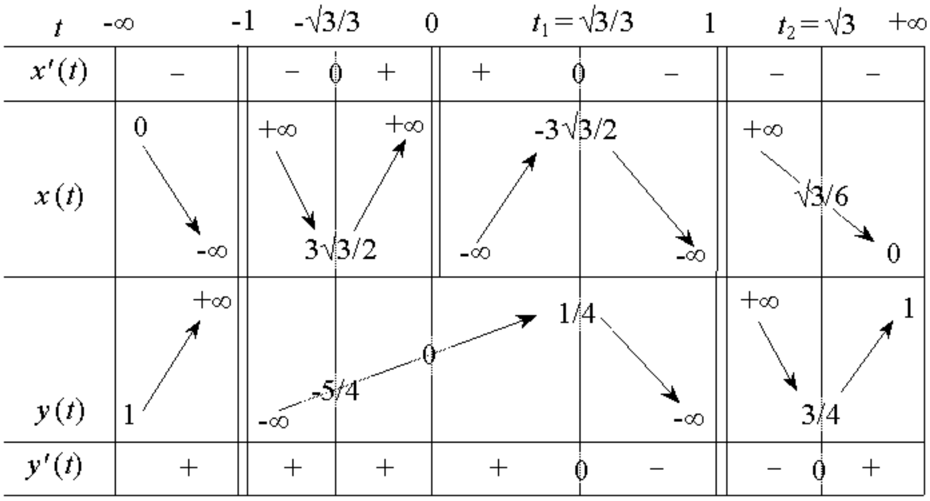
(d) Voici le tableau des variations pour $a = 0$.

t	0		$\sqrt{3}/3$		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	
$x(t)$	‖ $-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
$y(t)$	‖ 0	↘	$-1/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1
$y'(t)$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	

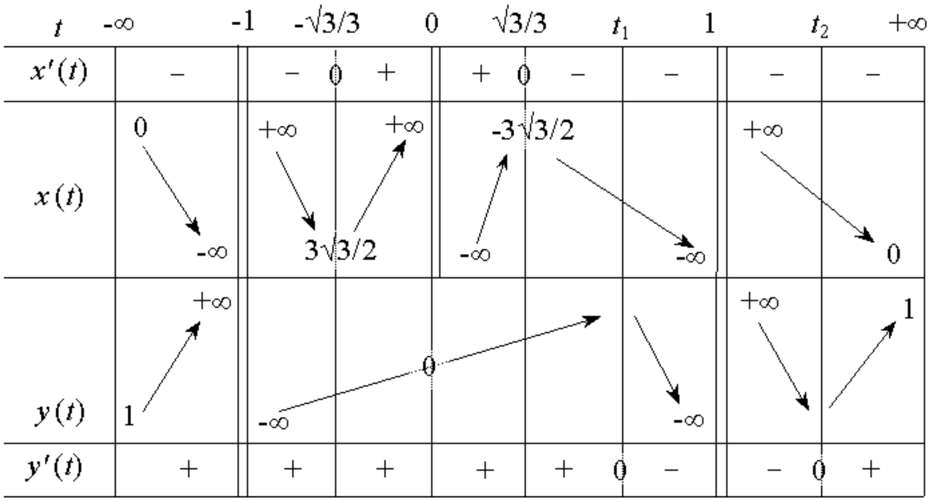
Voici le tableau des variations pour $0 < a < \sqrt{3}/2$.

t	$-\infty$		-1		$-\sqrt{3}/3$		0		t_1		$\sqrt{3}/3$		1		t_2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	
$x(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}/2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$-3\sqrt{3}/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	0
$y(t)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	0	↗		↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	1
$y'(t)$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

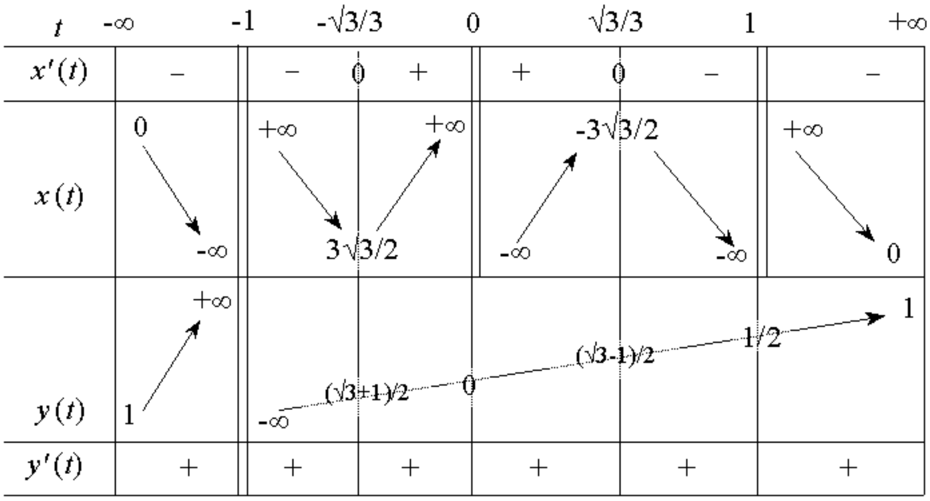
Voici le tableau des variations pour $a = \sqrt{3}/2$.



Voici le tableau des variations pour $\sqrt{3}/2 < a < 1$.



Voici le tableau des variations pour $a = 1$.



Voici le tableau des variations pour $a > 1$.

t	$-\infty$		-1		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$x(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}/2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
$y(t)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	0	↗		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1
$y'(t)$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$		$+$	‖	$+$	

[Q]

3. L'étude précédente montre que Γ_a a un point stationnaire si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pour le décrire, on peut effectuer un développement limité de $t \mapsto x(t)$ et de $t \mapsto y_a(t)$ au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc au voisinage de 0 après avoir posé $t = \frac{\sqrt{3}}{3} + h$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2-1} &= \frac{1}{-\frac{2}{3} + 2h\frac{\sqrt{3}}{3} + h^2} = \frac{-3}{2\Big(1 - \big(h\sqrt{3} + \frac{3}{2}h^2\big)\Big)} \\
&= -\tfrac{3}{2}\Big(1 + \big(h\sqrt{3} + \tfrac{3}{2}h^2\big) + \big(3h^2 + 3\sqrt{3}\,h^3\big) + \big(3\sqrt{3}\,h^3\big)\Big) \\
&= -\tfrac{3}{2}\Big(1 + \sqrt{3}\,h + \tfrac{9}{2}\,h^2 + 6\sqrt{3}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)\Big)
\end{aligned}$$

De même $\dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,h} = \sqrt{3}\Big(1 - \sqrt{3}\,h + 3h^2 - 3\sqrt{3}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)\Big)$.

Ainsi :

$$x(t) = \frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\Big(1 + \tfrac{9}{2}\,h^2 + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)\Big) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{4}\,h^2 - \frac{27}{4}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3).$$

On remarque ensuite que $y_a(t) = \dfrac{t(t-a)}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1-at}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1-\sqrt{3}\,h}{2(t^2-1)}$.

On en déduit :

$$y_a(t) = 1 - \tfrac{3}{4}(1-\sqrt{3}\,h)\Big(1 + \sqrt{3}\,h + \tfrac{9}{2}\,h^2 + 6\sqrt{3}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)\Big) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{9}{8}\,h^2 - \tfrac{9\sqrt{3}}{8}\,h^3 + \mathrm{o}(h^3)$$

Pour $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $M(t_0) = \Big(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\Big)$, $U = \frac{9}{8}\begin{pmatrix} -6\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{9}{8}\begin{pmatrix} -6 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

On a donc obtenu : $M(t) = M(t_0) + h^2 U + h^3 V + \overrightarrow{\mathrm{o}}(h^3)$

Le vecteur U dirige la tangente à l'arc en $M(t_0)$, et U, V sont libres.

Dans le repère $(M(t_0), U, V)$ les coordonnées $X(t), Y(t)$ de $M(t)$ vérifient $\begin{cases} X(t) \sim (t-t_0)^2 \\ Y(t) \sim (t-t_0)^3 \end{cases}$

Cela signifie que Γ_a présente en $M(t_0)$ un rebroussement de première espèce.

Il y a une autre méthode, qui consiste à calculer les dérivées successives (jusqu'à la troisième) des applications $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y_a(t)$, et de les évaluer en $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.