

Quelques propriétés de la cardioïde

On se place dans le plan \mathbb{R}^2 , muni de sa structure habituelle de plan euclidien orienté.

Dans tout le problème, a désigne un réel strictement positif.

On appelle *cardioïde* la courbe Γ de \mathbb{R}^2 dont une équation en polaires est $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

Première partie

1. Étudier et tracer la courbe Γ . On précisera l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre θ de Γ . On indiquera en particulier quels sont les points à tangente horizontale ou verticale. [S]
2. (a) Montrer que pour tout réel φ , il y a exactement trois points M, N, P de Γ en lesquels la tangente à Γ a pour angle polaire φ . [S]
(b) Déterminer le centre de gravité du triangle MNP . [S]
(c) Déterminer l'aire du triangle MNP . [S]
(d) Quand le point M décrit Γ , reconnaître la courbe décrite par le milieu I du segment NP (comment cette courbe se déduit-elle de Γ ?) [S]
3. Déterminer une représentation en polaires de la courbe Γ' décrite par la projection orthogonale $N(\theta)$ de O sur la tangente à Γ en $M(\theta)$. Construire Γ' . [S]
4. Une droite variable Δ , passant par O , rencontre Γ en deux points P et Q autres que O . On note A le point de coordonnées $(2a, 0)$.
(a) Déterminer le lieu du barycentre J du triangle APQ . [S]
(b) Déterminer le lieu du point d'intersection I des tangentes en P et Q à Γ . [S]
5. Soit (C) un cercle fixe de rayon $a > 0$. Un cercle mobile (C') de même rayon roule sans glisser sur (C) . Montrer que la trajectoire d'un point M de (C') est une cardioïde. [S]
6. On note $A(\theta)$ le point d'angle polaire θ d'un cercle de centre O .
On considère la droite D_θ passant par les points $A(\theta)$ et $A(2\theta)$.
Montrer que quand θ varie, D_θ reste tangente à une cardioïde que l'on déterminera. [S]

Deuxième partie

1. Déterminer le centre de courbure au point de paramètre $\theta = 0$ de Γ . [S]
2. On oriente Γ dans le sens des θ croissants.
(a) Déterminer une abscisse curviligne sur Γ , avec $(0, 0)$ comme origine.
Quelle est la longueur totale de la courbe Γ ? [S]
(b) Préciser le repère de Frenet et la courbure au point de paramètre θ . [S]
(c) Montrer que l'ensemble des centres de courbure de Γ est une cardioïde, dont on indiquera par quelle transformation géométrique simple elle se déduit de Γ . [S]

Troisième partie

1. Soit \mathcal{D} le domaine du plan intérieur à la cardioïde Γ .

On suppose que \mathcal{D} est recouvert d'une densité surfacique constante $\mu > 0$.

On note \mathcal{D}^+ l'intersection de \mathcal{D} avec le demi-plan $y \geq 0$.

- Calculer l'aire de \mathcal{D} . [S]
- Calculer le centre d'inertie de \mathcal{D} et celui de \mathcal{D}^+ . [S]
- Calculer les moments d'inertie de \mathcal{D} par rapport à Ox , à Oy , à O . [S]
- Calculer le volume qu'engendrerait \mathcal{D} par rotation autour de Ox . [S]

2. On suppose que Γ est recouvert d'une densité linéique constante $\mu > 0$.

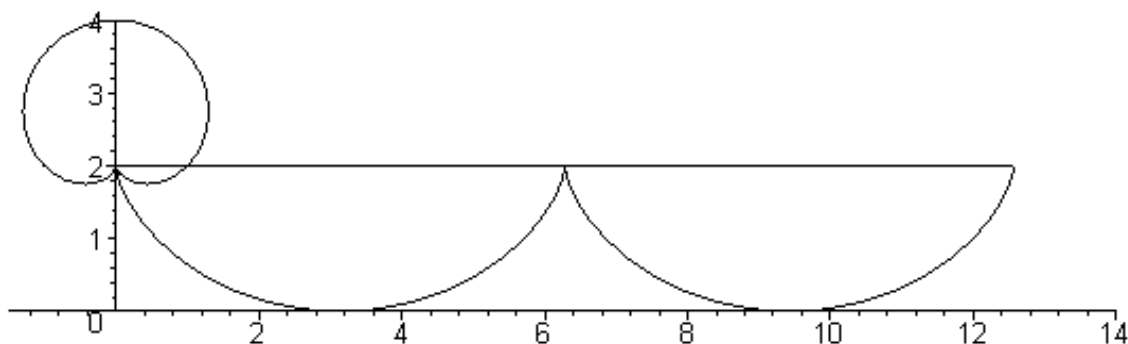
On note Γ^+ l'intersection de Γ avec le demi-plan $y \geq 0$.

- Calculer le centre d'inertie de Γ et celui de Γ^+ . [S]
- Calculer les moments d'inertie de Γ par rapport à Ox , à Oy , à O . [S]
- Calculer l'aire de la nappe qu'engendrerait Γ^+ par rotation autour de Ox . [S]

3. On considère la cycloïde, d'équation $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 + \cos(t) \end{cases}$, pour t réel.

Chaque arche de cette cycloïde a pour longueur 8.

Sur le point $(0, 2)$ de la cycloïde, on "pose" une cardioïde de longueur 8, comme indiqué :



On fait ensuite rouler la cardioïde sur la cycloïde, sans glisser. Montrer que, pendant ce mouvement, le point de rebroussement de la cardioïde décrit la droite $y = 2$. [S]

Corrigé du problème

Première partie

1. L'application $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est 2π -périodique et paire. On peut donc limiter l'étude à $[0, \pi]$ puis procéder à une symétrie par rapport à Ox pour obtenir toute la courbe.

La fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ reste strictement positive sur $[0, \pi[$. Elle s'annule en $\theta = \pi$ ce qui indique un passage à l'origine avec une tangente horizontale. Compte tenu de la symétrie par rapport à Ox , l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

Notons V (resp. φ) l'angle polaire de la tangente en $M(\theta)$ dans le repère mobile (resp. dans le repère fixe). On sait que $\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cotan\frac{\theta}{2} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ (π), puis $\varphi = V + \theta = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ (π).

Le calcul précédent est encore valable si $\theta = 0$ (π). En effet on a $\rho'(0) = 0$ donc la tangente en $M(0) = (2a, 0)$ est verticale, et pour $\theta = \pi$ on sait que la tangente est horizontale.

- Les points à tangente horizontale sont caractérisés par $\varphi = 0$ (π) donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\frac{2\pi}{3}$).

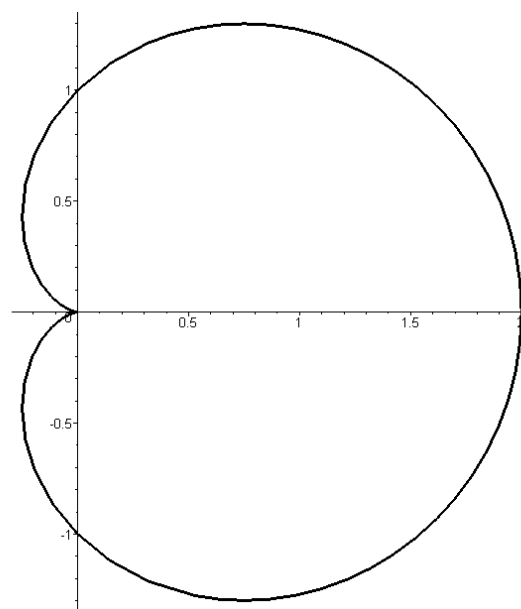
On trouve $M(\pi) = (0, 0)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$ et $M\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)$.

- Les points à tangente verticale sont caractérisés par $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (π) donc par $\theta = 0$ ($\frac{2\pi}{3}$).

On trouve $M(0) = (2a, 0)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant $a = 1$.)

| θ | 0 | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | π | |
|---------------------|---------|---------|---------|----------|-------|---|
| $\rho'(\theta)$ | 0 | - | - | - | - | 0 |
| $\rho(\theta)$ | 2a | $3a/2$ | a | $a/2$ | 0 | |
| $\varphi \bmod \pi$ | $\pi/2$ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | 0 | |



[Q]

2. (a) L'angle polaire (dans le repère fixe) de la tangente en $M(\theta)$ est $\varphi = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ (π).

Fixer φ conduit à $\frac{3\theta}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2}$ (π) puis à $\theta = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ($\frac{2\pi}{3}$).

On obtient trois solutions modulo 2π : $\theta_1 = \frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}$ et $\theta_3 = \frac{2\varphi}{3} + \pi$.

Pour tout angle φ , il y a donc toujours trois points distincts M, N, P de Γ en lesquels la tangente à Γ a pour angle polaire φ . [Q]

(b) Notons θ_1 , $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta_3 = \theta_1 + \frac{4\pi}{3}$ les angles polaires des points M, N, P .

$$\text{Les coordonnées du point } M(\theta) \text{ sont } \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = \frac{a}{2}(2 \cos \theta + 1 + \cos 2\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = \frac{a}{2}(2 \sin \theta + \sin 2\theta) \end{cases}$$

Pour chacun des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, on a $(e^{i\theta})^3 = \omega$, avec $\omega = e^{3i\theta_1}$.

Ainsi les nombres complexes $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_3}$ sont solutions de $z^3 - \omega = 0$.

Leurs fonctions symétriques élémentaires vérifient donc $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Il en découle $\sigma_1 = \sum_k e^{i\theta_k} = 0$, puis $S_2 = \sum_k e^{2i\theta_k} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$.

$$\text{On en déduit } \begin{cases} \sum_k \cos \theta_k = \sum_k \sin \theta_k = 0 \\ \sum_k \cos 2\theta_k = \sum_k \sin 2\theta_k = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x(\theta_1) + x(\theta_2) + x(\theta_3) = \frac{3a}{2} \\ y(\theta_1) + y(\theta_2) + y(\theta_3) = 0 \end{cases}$$

Cela prouve que le centre de gravité du triangle MNP est toujours $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. [Q]

(c) Les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ vérifient $\cos 3\theta = \cos 3\theta_1$ donc $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 3\theta_1 = 0$.

On en déduit en particulier les relations suivantes :

- $\sigma_1 = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0$ (mais on le savait déjà.)
- $\sigma_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3 = -\frac{3}{4}$.

L'aire du triangle MNP est $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})|$.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \det(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) + \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) + \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \\ &= \rho(\theta_2)\rho(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_3) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\rho(\theta_2)\rho(\theta_3) + \rho(\theta_3)\rho(\theta_1) + \rho(\theta_1)\rho(\theta_2)) \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} ((1 + \cos \theta_2)(1 + \cos \theta_3) + (1 + \cos \theta_3)(1 + \cos \theta_1) + (1 + \cos \theta_1)(1 + \cos \theta_2)) \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} (3 + 2\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

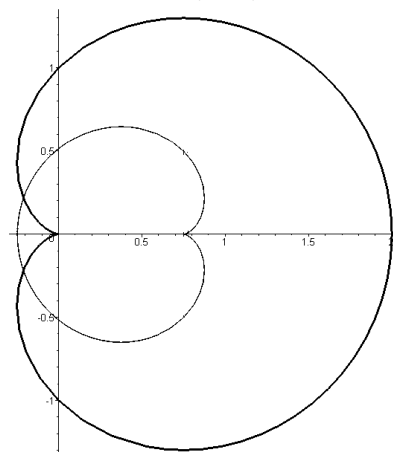
Conclusion : l'aire du triangle MNP est constante, égale à $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. [Q]

(d) On sait que le centre de gravité du triangle MNP est $G\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} &= 3\overrightarrow{OG} \\ \text{donc } \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OI} &= 3\overrightarrow{OG} \\ \text{puis } \overrightarrow{OI} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}. \end{aligned}$$

Le point I se déduit donc de M par la composée de l'homothétie de centre O et de rayon $-1/2$ puis de la translation de vecteur $3\overrightarrow{OG}/2 = (3a/4, 0)$.

La courbe décrite par I est donc encore une cardioïde, représentée ici (son point de rebroussement est en $(3a/4, 0)$.)



[Q]

3. La tangente à Γ en $M(\theta)$ est dirigée par $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

La droite (ON) est donc dirigée par $\vec{u}(\frac{3\theta}{2}) = (\sin \varphi, -\cos \varphi) = (\cos \frac{3\theta}{2}, \sin \frac{3\theta}{2})$.

Ainsi il existe une fonction $\lambda(\theta)$ telle que $\overrightarrow{ON} = \lambda(\theta) \vec{u}(\frac{3\theta}{2})$

Il reste à écrire que $(\overrightarrow{ON} \mid \overrightarrow{MN}) = 0$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{ON}) = \|\overrightarrow{ON}\|^2$.

Cela s'écrit $\lambda(\theta)^2 = a(1 + \cos \theta) \lambda(\theta) (\vec{u}(\theta) \mid \vec{u}(\frac{3\theta}{2})) = a(1 + \cos \theta) \lambda(\theta) \cos \frac{\theta}{2}$.

On trouve finalement $\lambda(\theta) = a(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} = 2a \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^3$.

Remarque : on a simplifié par $\lambda(\theta)$ mais on constate que le cas $\lambda(\theta) = 0$ correspond à un point N à l'origine, c'est-à-dire à une tangente à Γ passant par O . Or seule la tangente en $M(\pi) = O$ à Γ passe par O . On constate d'ailleurs que pour $\theta = \pi$, la formule obtenue ci-dessus donne bien $\lambda(\pi) = 0$.

Ainsi, pour tout θ , $\overrightarrow{ON} = 2a \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^3 \vec{u}(\frac{3\theta}{2}) = 2a \left(\cos \frac{\theta'}{3}\right)^3 \vec{u}(\theta')$ en posant $\theta' = \frac{3\theta}{2}$.

Cela signifie que le point N parcourt la courbe d'équation $\rho = 2a \left(\cos \frac{\theta}{3}\right)^3$ en polaires.

L'application $\theta \mapsto 2a \left(\cos \frac{\theta}{3}\right)^3$ est 6π -périodique et paire. On peut donc réduire l'étude à $[0, 3\pi]$ puis procéder à une symétrie par rapport à Ox (on obtient toute la courbe.)

On observe de plus que $\rho(3\pi - \theta) = -\rho(\theta)$. Cela signifie que les points $M(\theta)$ et $M(3\pi - \theta)$ sont symétriques par rapport à Ox .

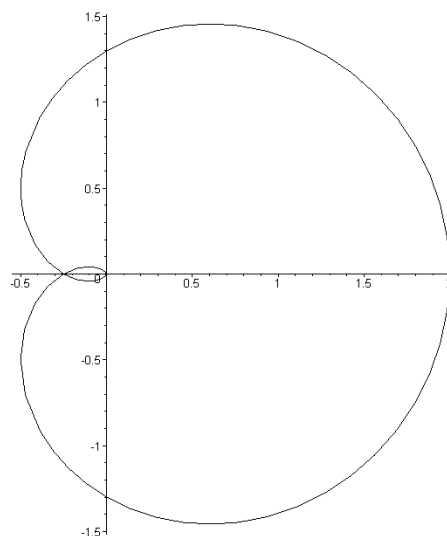
On peut donc se ramener à $[0, \frac{3\pi}{2}]$ et procéder à une symétrie par rapport à Ox (la symétrie déjà obtenue devenant alors inutile.)

On a $\rho'(\theta) = -2a \sin \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3}$, d'où avec les notations habituelles : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\cotan \frac{\theta}{3}$.

On en déduit que l'angle polaire (dans le repère canonique) de la tangente au point de paramètre θ est égal à $\varphi = \theta + V = \frac{4\theta}{3} + \frac{\pi}{2} (\pi)$.

Voici le tableau de variation et le tracé (obtenu avec Maple, en choisissant $a = 1$.)

| θ | 0 | $\pi/2$ | π | $3\pi/2$ |
|---------------------|---------|----------------|----------|----------|
| $\rho'(\theta)$ | 0 | - | - | - 0 |
| $\rho(\theta)$ | 2a | $3a\sqrt{3}/4$ | $a/4$ | 0 |
| $\varphi \bmod \pi$ | $\pi/2$ | $\pi/6$ | $5\pi/6$ | $\pi/2$ |



On observe un passage à l'origine pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, donc avec une tangente verticale.

Le point $(-\frac{a}{4}, 0)$ est un point double, obtenu à la fois pour $\theta = \pi$ et pour $\theta = -\pi$. [Q]